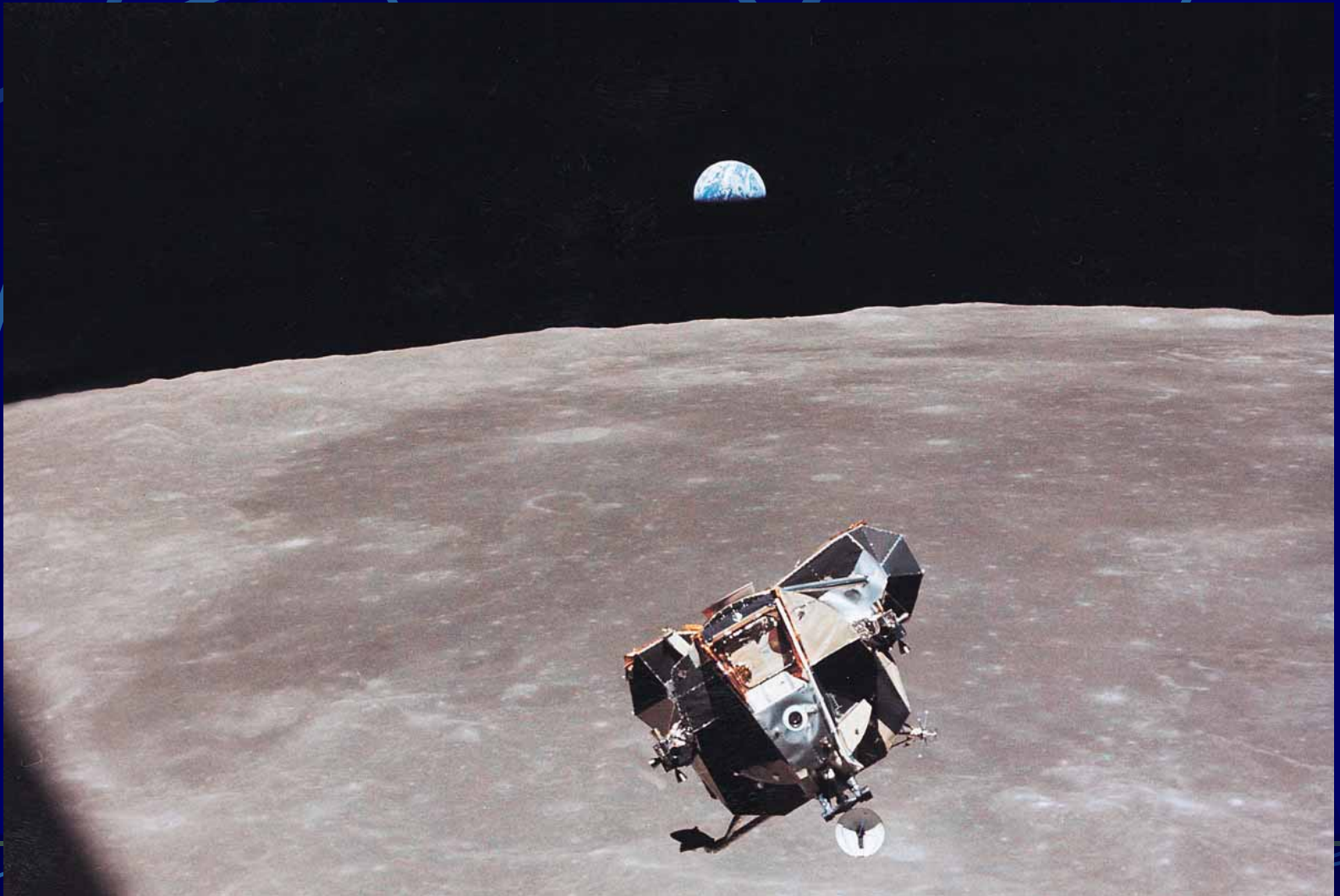


# 萬有引力與行星華爾滋



# 你覺得呢？

- 如何讓物體保持等定速（一樣快）？
- 地球繞太陽的軌道是什麼形狀？
- 行星是以固定速率繞行太陽嗎？
- 每個行星都以相同速率繞行太陽嗎？
- 冥王星到底哪裡不對？

- 恆星 star
- 行星 planet ← wanderer  
→ 東向順行 direct motion
- 熒惑之星? 火星的逆行運動 (retrograde motion)

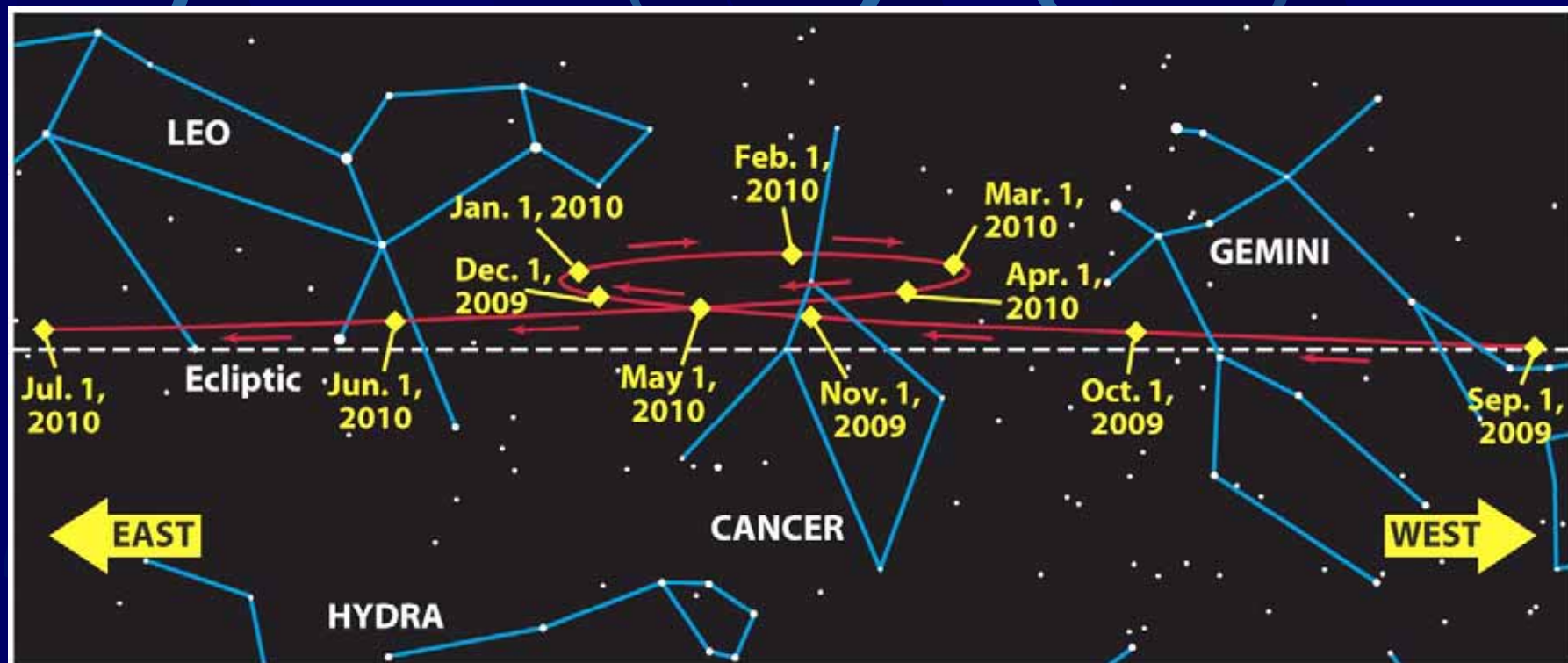
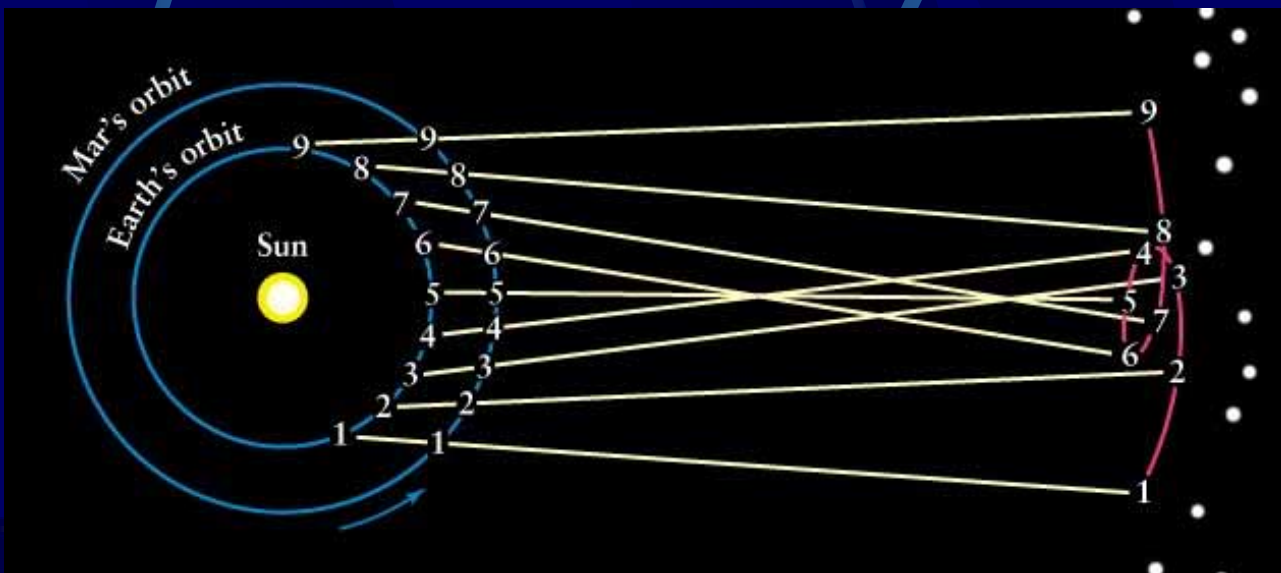


Figure 2-2  
Discovering the Universe, Seventh Edition  
© 2006 W.H. Freeman and Company

火星從2009年12/23到2010年3/12將為逆行

# 從「地心說」(geocentric) 到「日心說」(heliocentric)

Nicolaus Copernicus (哥白尼；十六世紀波蘭人)：如果假設太陽在中央，則可以解釋很多現象，包括讓人困惑的逆行運動



地球與火星皆  
繞行太陽

地球動得快

→ 火星看起來  
似乎逆行

刮刮鬍子？



# 視差 (parallax)

從不同角度，看到東西不同面

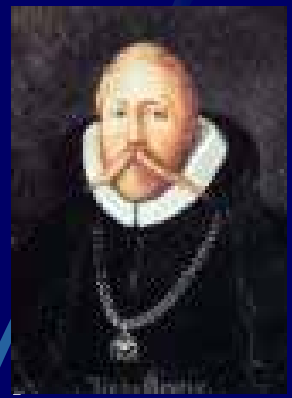


2006.09.27

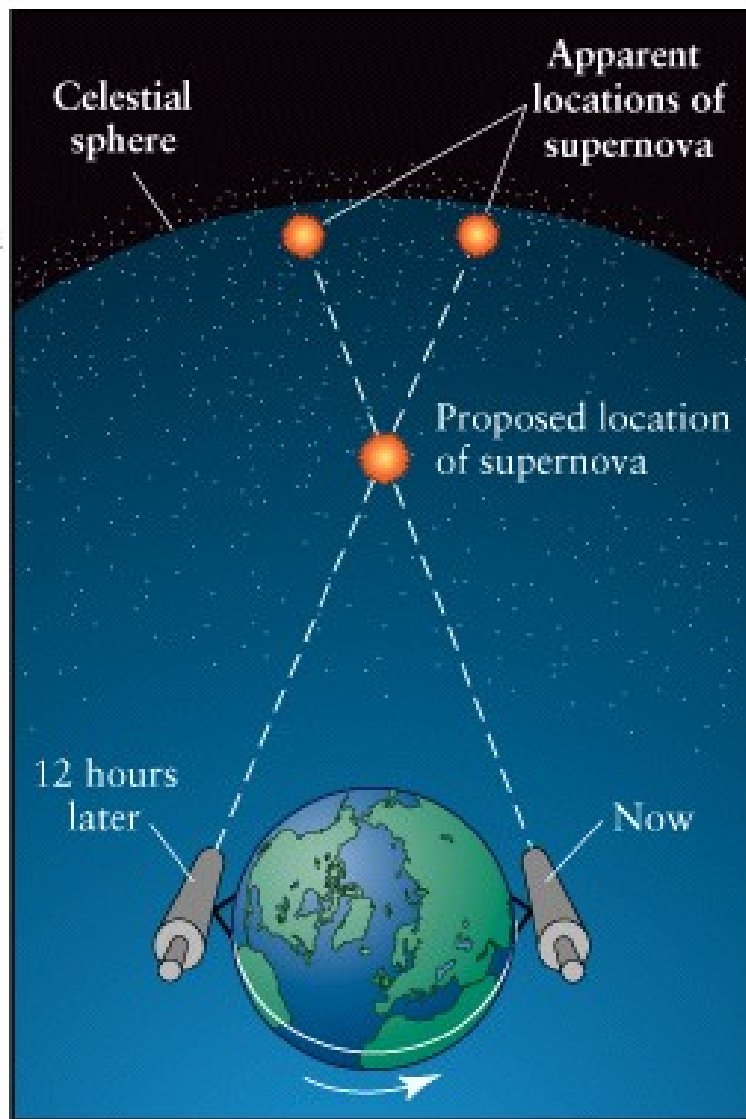
我們可以利用視差原理測量遠方物體距離

# Tycho Brahe (第谷)

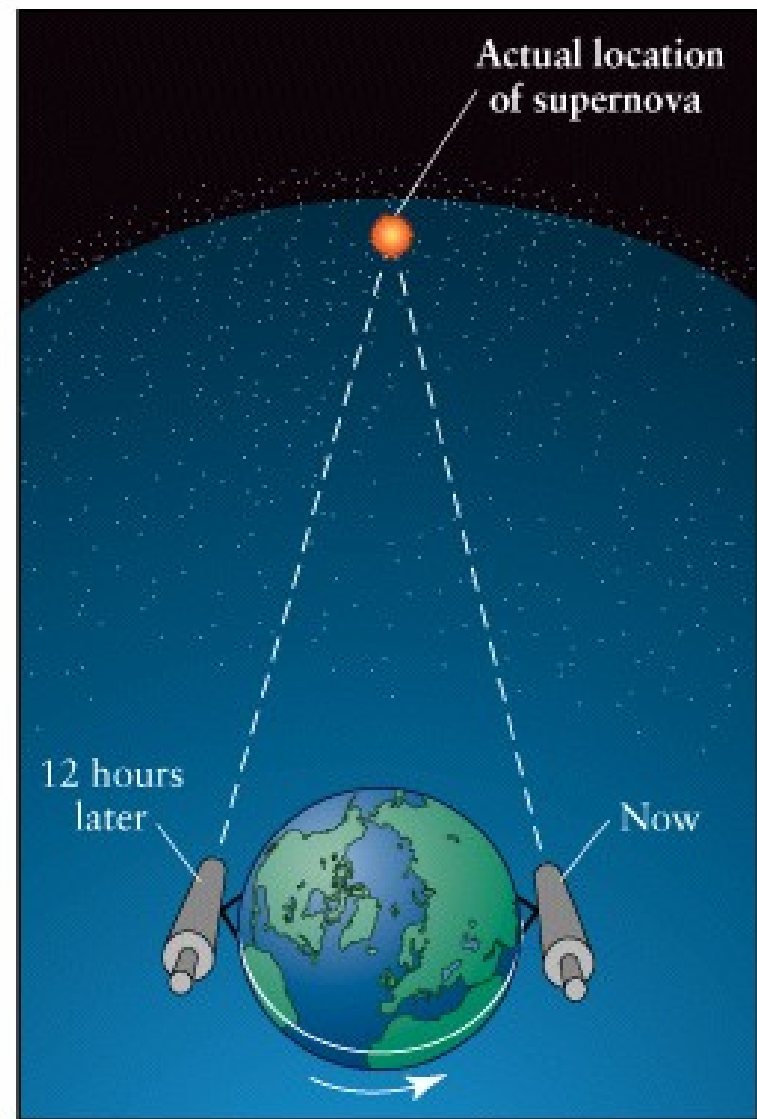
(1546~1601)



- 1572 年一顆亮星突然出現在 Cassiopeia (仙后座)，比金星還耀眼，一年半以後才漸漸黯淡
- 如果天是永恆、不會變的 (從 Aristotle 及 Plato 傳下來的觀念)，這一定不是星，而是地球附近一個發亮的東西
- 丹麥天文學家 Tycho Brahe 想到，如果「這個東西」真的很近，應該可以量到它的視差 (parallax)。結果量不到，Brahe 因此認為這個東西非常遠



a

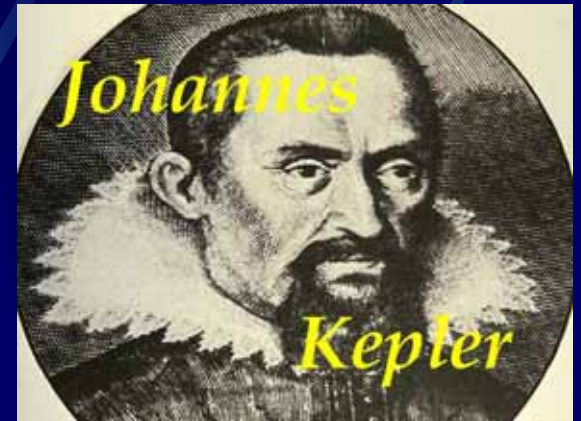


b

- 現在我們知道這是在 1572 年「看到」爆發的一顆超新星
- Brahe 於 1576～1597 年有系統地觀測行星的位置，準確到  $1'$ ，於 1601 年辭世，留下大量珍貴的觀測資料給了 Johannes Kepler（刻卜勒）

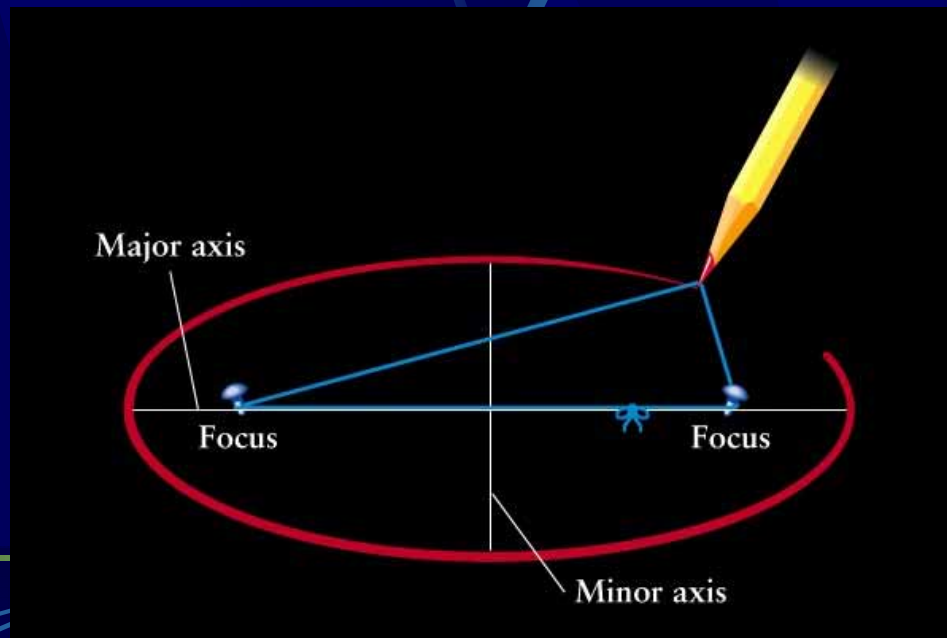


# Johannes Kepler (刻卜勒) 1571~1630



## 刻卜勒行星三大運動定律

1. 行星繞行太陽的軌道爲橢圓形，太陽位於橢圓其中一個焦點（另外一個焦點有什麼？）



If a particle moves in a central force field, its path must be a plane curve.

Let  $\vec{F} = f(r)\vec{r}_1$  be the central force field. Then because  $r_1$  is in the direction of the position vector  $r$ ,

$$\vec{r} \times \vec{F} = 0$$

Since  $\vec{F} = m d\vec{v}/dt$ , this becomes

$$\vec{r} \times d\vec{v}/dt = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = 0$$

Integrating, we get

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{h} = \text{const.} \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{h}$$

For a particle moving in a central force field, the angular momentum must be conserved.

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{h}$$

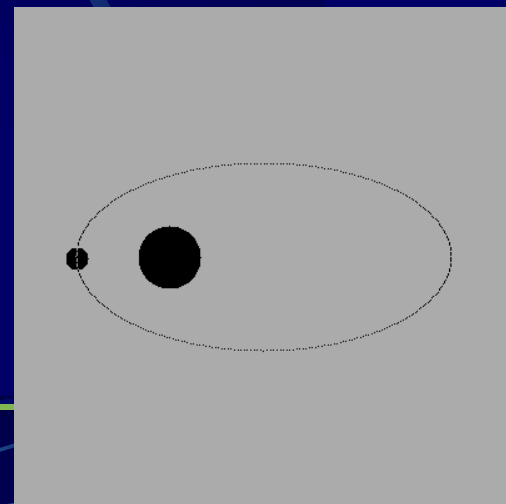
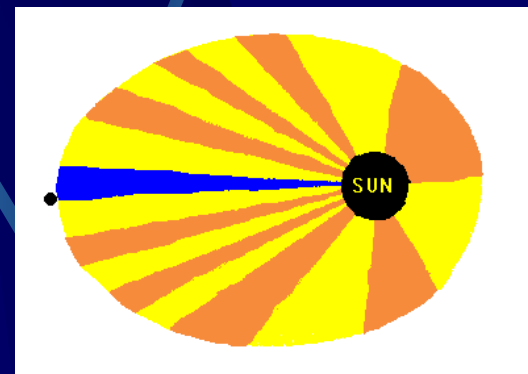
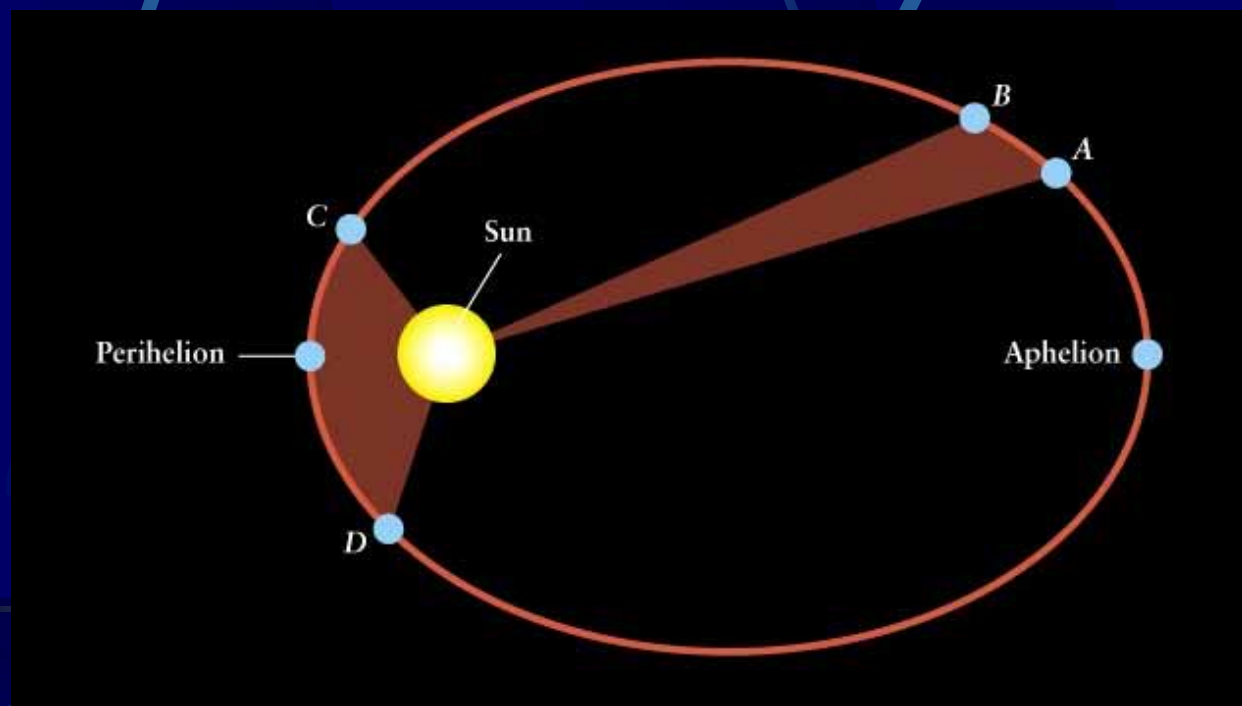
Multiplying by mass  $m$ ,

$$m(\vec{r} \times \vec{v}) = m\vec{h}$$

The left side is the angular momentum, and the right side is a constant vector. Hence the proof.

# 刻卜勒行星三大運動定律

2. 連接行星與太陽的直線，在相同時間內劃過相同面積（對同一行星而言）





The velocity in polar coordinates is

$$\vec{r} = r\hat{r}_1 \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r}_1 + r\dot{\theta}\hat{\theta}_1$$

The acceleration in polar coordinates is

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}_1$$

So the equation of motion for a particle in a central force field is [mass] [acceleration] = [net force]

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}_1 = f(r)\hat{r}_1$$

Thus, separating the  $\hat{r}_1$  and the  $\hat{\theta}_1$  parts

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

For the  $\hat{\theta}_1$  part,

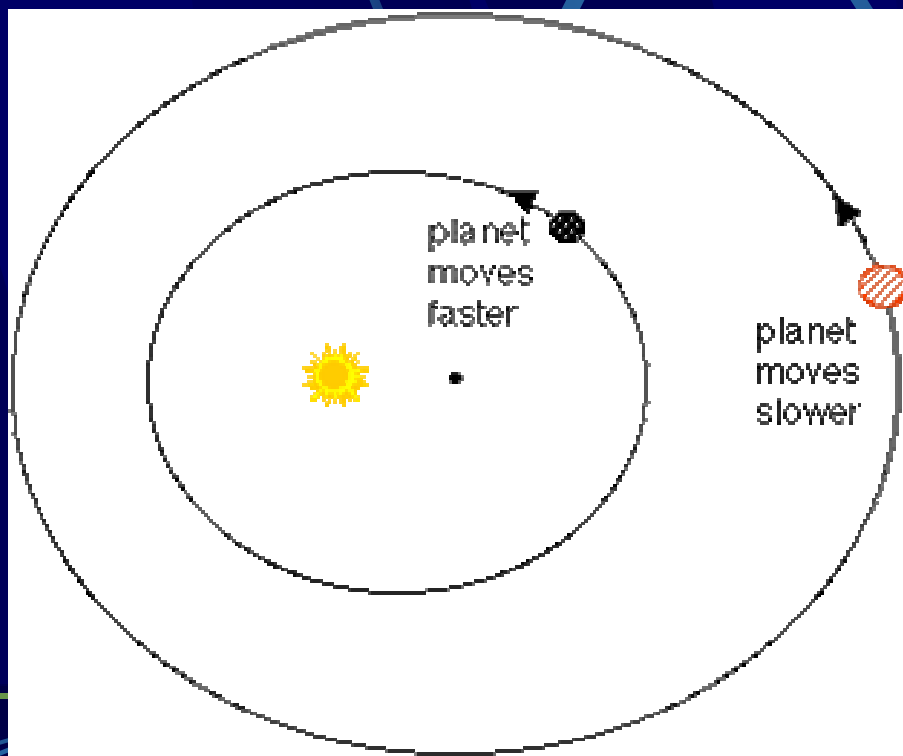
$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{m}{r}(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

Thus  $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$ , and so

$$r^2\dot{\theta} = h = \text{constant}$$

## 刻卜勒行星三大運動定律

3. 行星繞太陽所需的「時間長短的平方」  
（週期）與「和太陽的距離的三次方」  
（軌道半長軸）成正比（對不同行星而言）

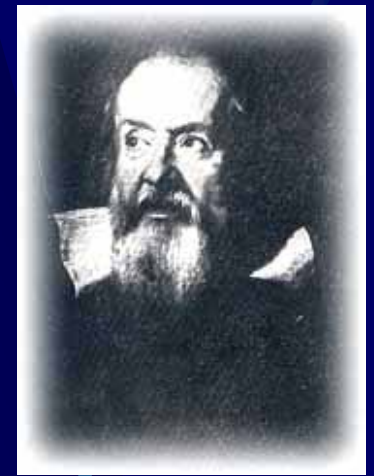


- 凱卜勒接收來自 Tycho Brahe 大量精確的觀測資料，歸納出行星運動定律，屬於經驗法則，並沒有學理基礎
- 換句話說，刻卜勒的偉大發現乃「知其然」但不知「其所以然」
- 直到牛頓推導出萬有引力定律，才成功解釋行星運動的根本原理



# Galileo Galilei

## ( 加利略 ) 1564~1642



- 當時已經發明了望遠鏡
- 加利略首先使用望遠鏡觀察天體、天象
- 看到了月球表面的坑洞、太陽黑子、木星的（四顆）衛星
- 木星的這四顆衛星稱為 **Galileo moons (or satellites)**
- 這些觀測乃支持日心說的有力證據

# Issac Newton (牛頓) 1643~1727



## ● 牛頓力學定律

- 動者恆動、靜者恆靜
- 物體加速度正比於施加的力量
- 當某物體施加作用力於另一個物體，另一個物體則施加反作用力，大小相等，方向相反

# 力 ↔ 運動

- 力 (force) → 影響 (改變狀態)

變形、運動狀態 → 快慢、轉彎

加速度 (acceleration) ← 速度改變

- 力 = 慣性 × 加速度

保持原狀；抗拒改變

- 東西保持直走，並沒有改變運動狀態（速度沒改變），所以不需要施加力量也就是「**動者恆動、靜者恆靜**」
- 若要顯著改變狀態，需要大的力量
- 惰性越大的物理，越不容易改變其狀態；若要改變其運動狀態，需要越大的力
- **惰性 = 質量**（包含物質的多寡）
- 其實，質量是由「力」與「加速度」所定義



# 牛頓萬有引力定律

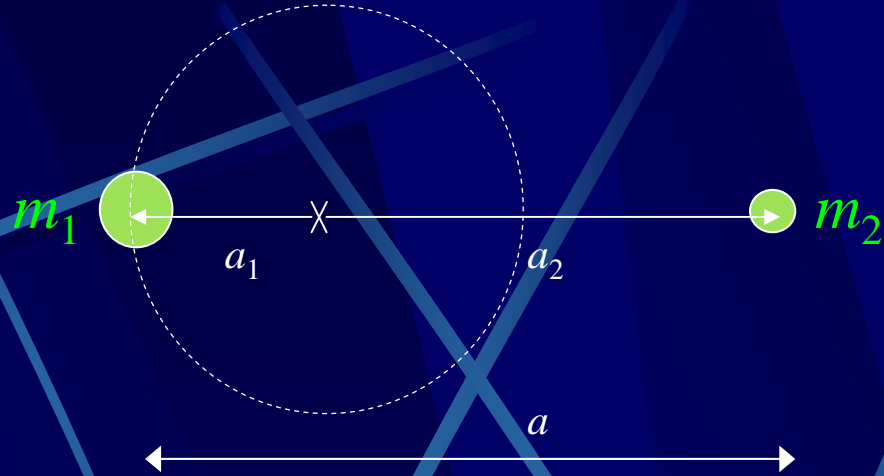
兩物之間恆存互相吸引力，其大小與各自質量乘積成正比，與彼此距離平方成反比

$$\text{萬有引力} = (\text{質量A}) \times (\text{質量B}) / (\text{距離})^2$$

可以成功解釋凱卜勒行星運動定律！

行星距離太陽遠 → 萬有引力小  
→ 不能轉得太快

→ 行星距離遠則（公轉）軌道速率慢  
適用於相同行星在軌道不同位置，  
或是不同行星



For two bodies  $m_1$  and  $m_2$ , we have

$$a_1 : a_2 : a = m_2 : m_1 : (m_1 + m_2)$$

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a \equiv \mu a$$

where  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  is the **reduced mass**, and  $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2$

Consider the motion of  $m_1$  around the center of mass  
[centripetal force] = [mutual gravitation force]

$$\frac{4\pi^2 a_1}{P^2} = \frac{Gm_2}{a^2}$$

Then,

$$\frac{4\pi^2 r}{P^2} \frac{m_1 m_2}{m_1(m_1 + m_2)} a = \frac{Gm_2}{a^2}$$

Thus,

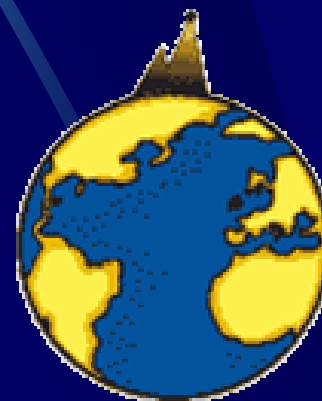
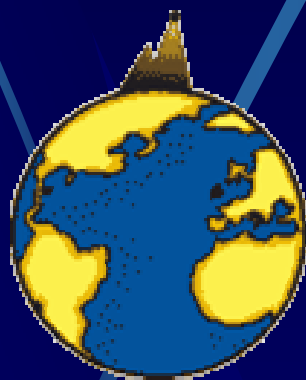
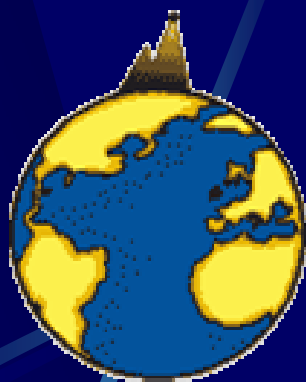
$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G}{4\pi^2} (m_1 + m_2) = \text{constant}$$

For solar-system planets,

$$\frac{r_{\text{AU}}^3}{P_{\text{yr}}^2} = (M_{\text{sun}} + m_{\text{planet}}) M_{\text{sun}} \approx 1$$

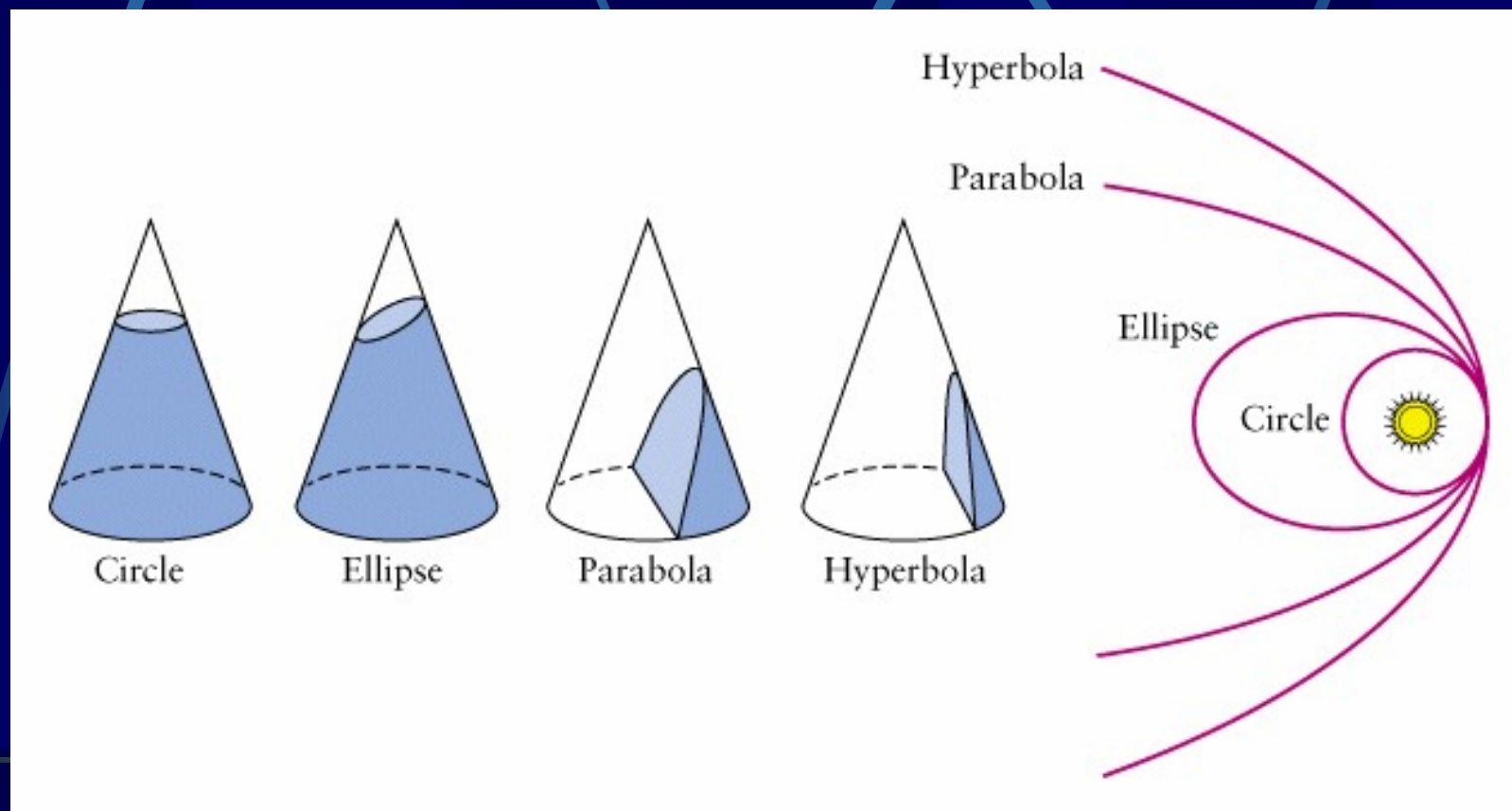
行星	軌道半長軸 (AU)	公轉週期 (年)
水星	0.3871	0.2408
金星	0.7233	0.6152
地球	1.0000	1.0000
火星	1.5237	1.8809
( 穀神星 )	2.7656	4.603
木星	5.2034	11.862
土星	9.5371	29.458
天王星	19.1913	84.01
海王星	30.0690	164.79
( 冥王星 )	39.4817	247.9





牛頓推論出天體除了**橢圓**（ellipse；圓形 circle 只是特殊的橢圓）軌道以外，還可以有其他軌道形狀：

parabola（**拋物線**）、hyperbola（**雙曲線**）

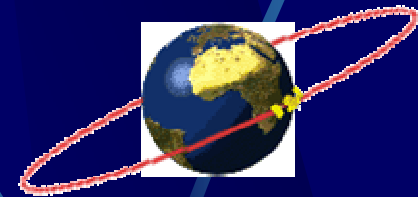
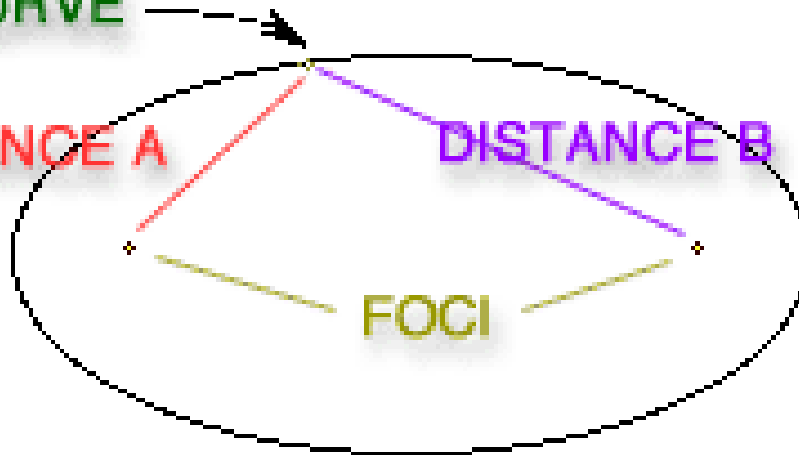


ANY POINT  
ON THE CURVE

DISTANCE A

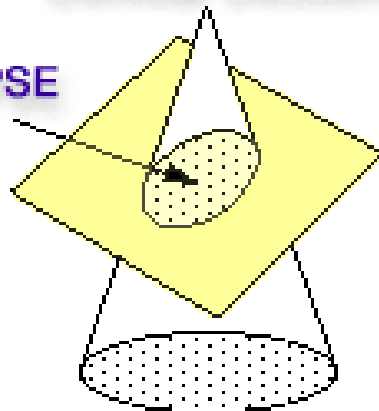
DISTANCE B

FOCI



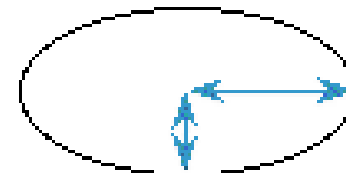
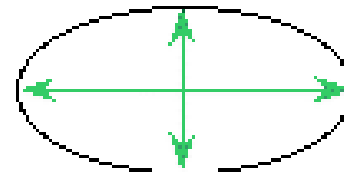
Ellipse From a  
Conical Section

ELLIPSE



CIRCULAR BASE OF CONE

Major and Minor Axes



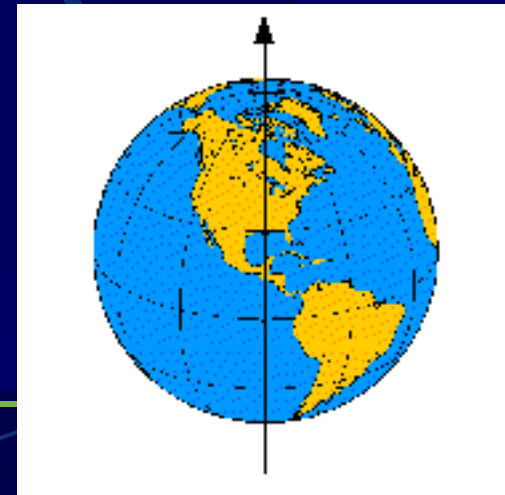
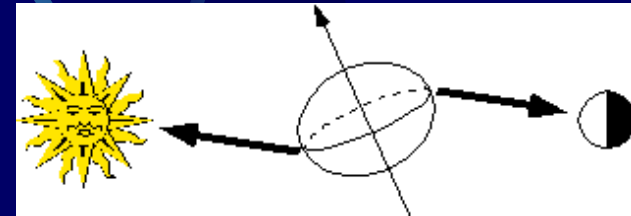
Semi-major and Semi-minor Axes

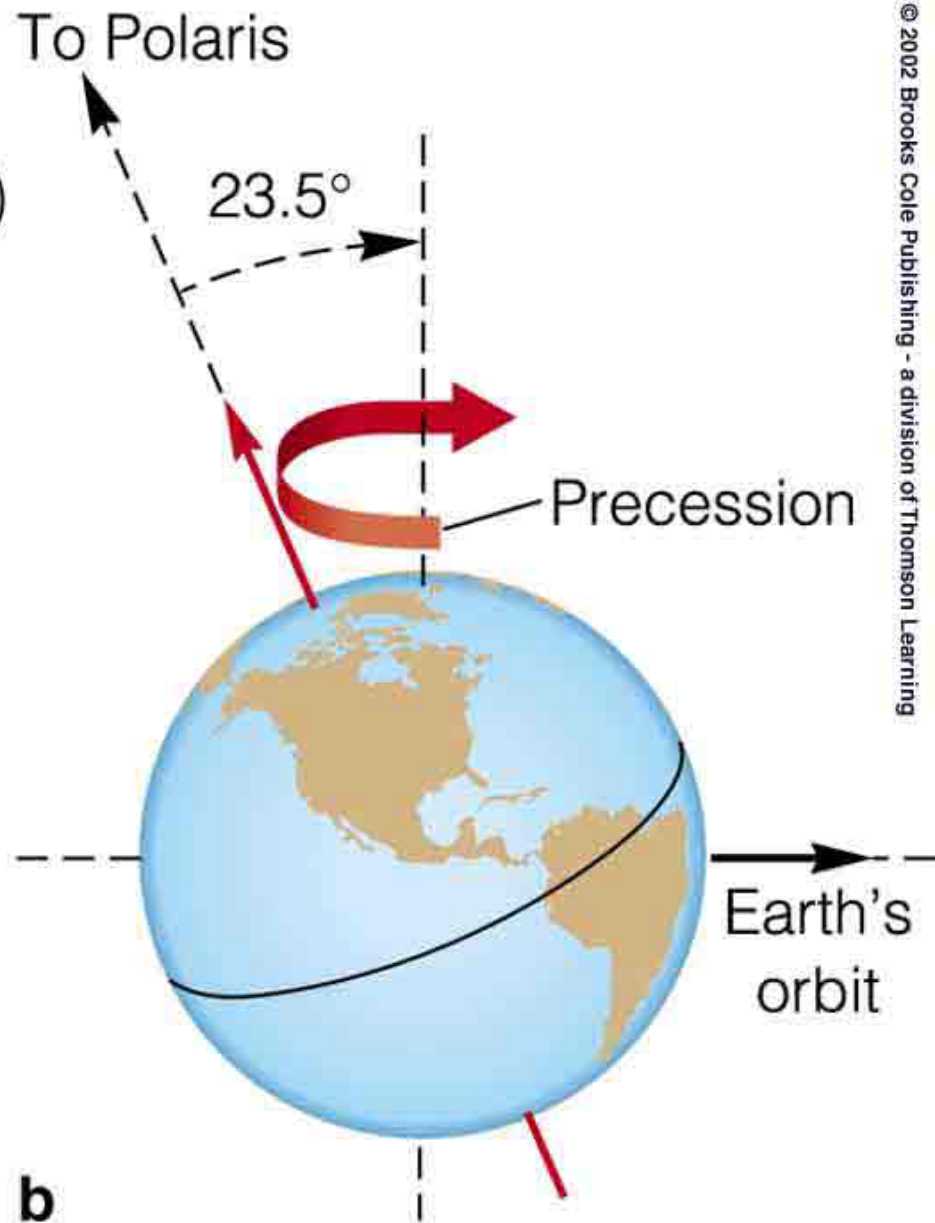
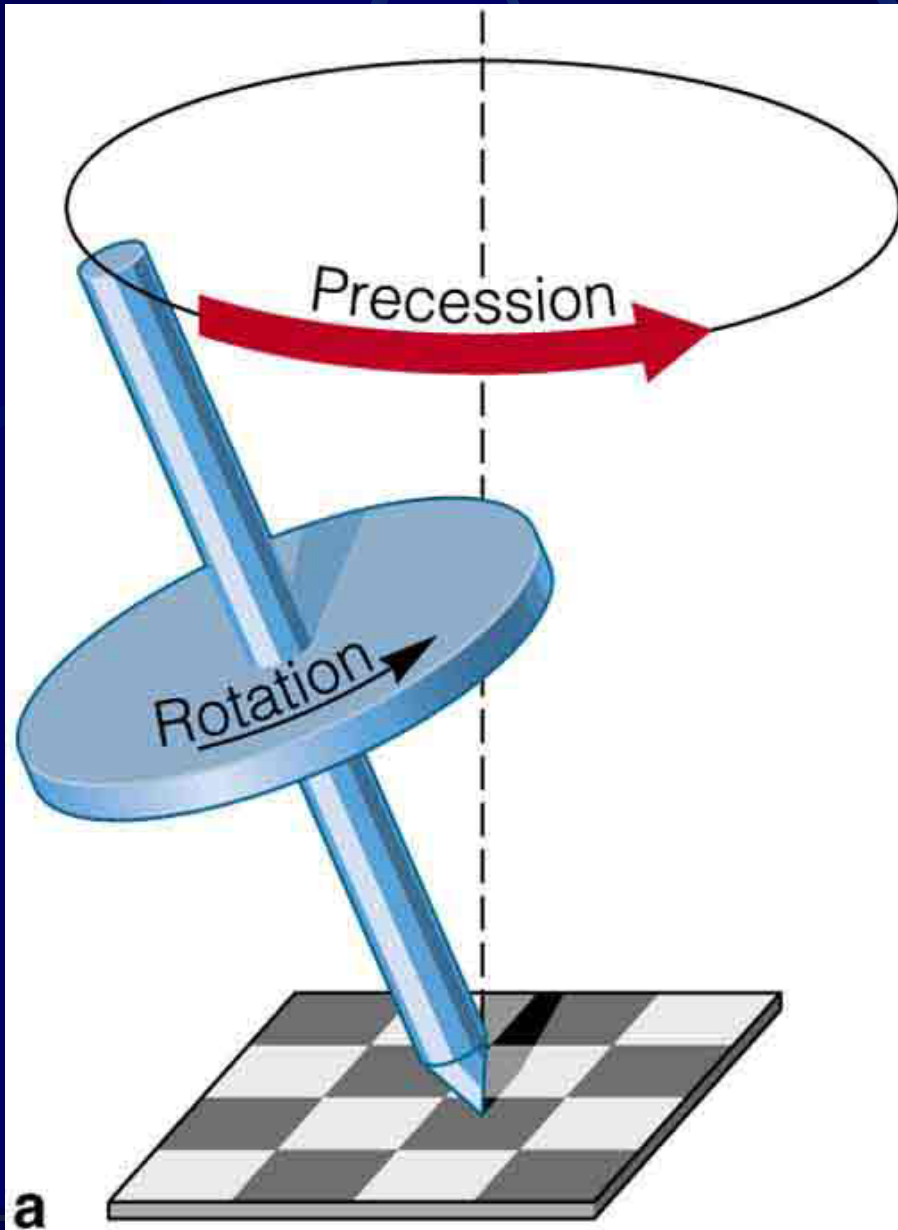
# 地球的形狀

- 地球並不是完美球型，而在赤道方向稍微突起
- 原因來自地球自轉，以及地球並非完全剛體
- 沿赤道的直徑比沿南北兩極的直徑長了43公里，相當於0.43%

# 地軸的指向

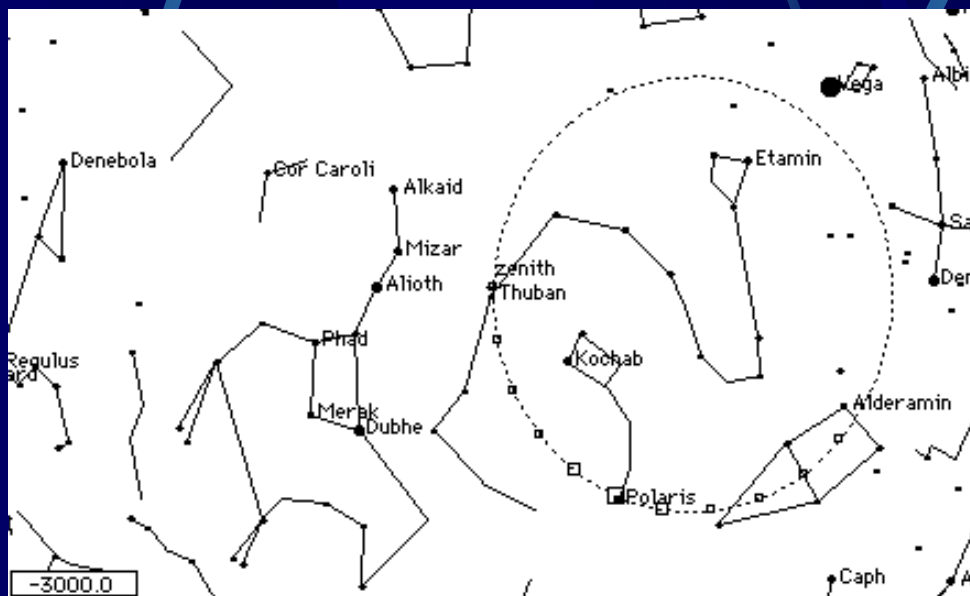
- 陀螺轉動時，自轉軸在空中畫出圓錐形
- 地球自轉受到月球、太陽及其他天體影響，自轉軸也有進動（也稱**歲差運動** precession）
- 歲差運動很慢，短期內（百年）感覺不出來
- 地軸約 26,000 進動一圈
- 目前天北極方向與 Polaris 差不到一度，西元 2100年達到最近 27'







- 約5000年前，當時「北極星」為 Draco 星座當中的Thuban 星，為埃及人的北極星
- ~13,000 年後織女星將成為北極星

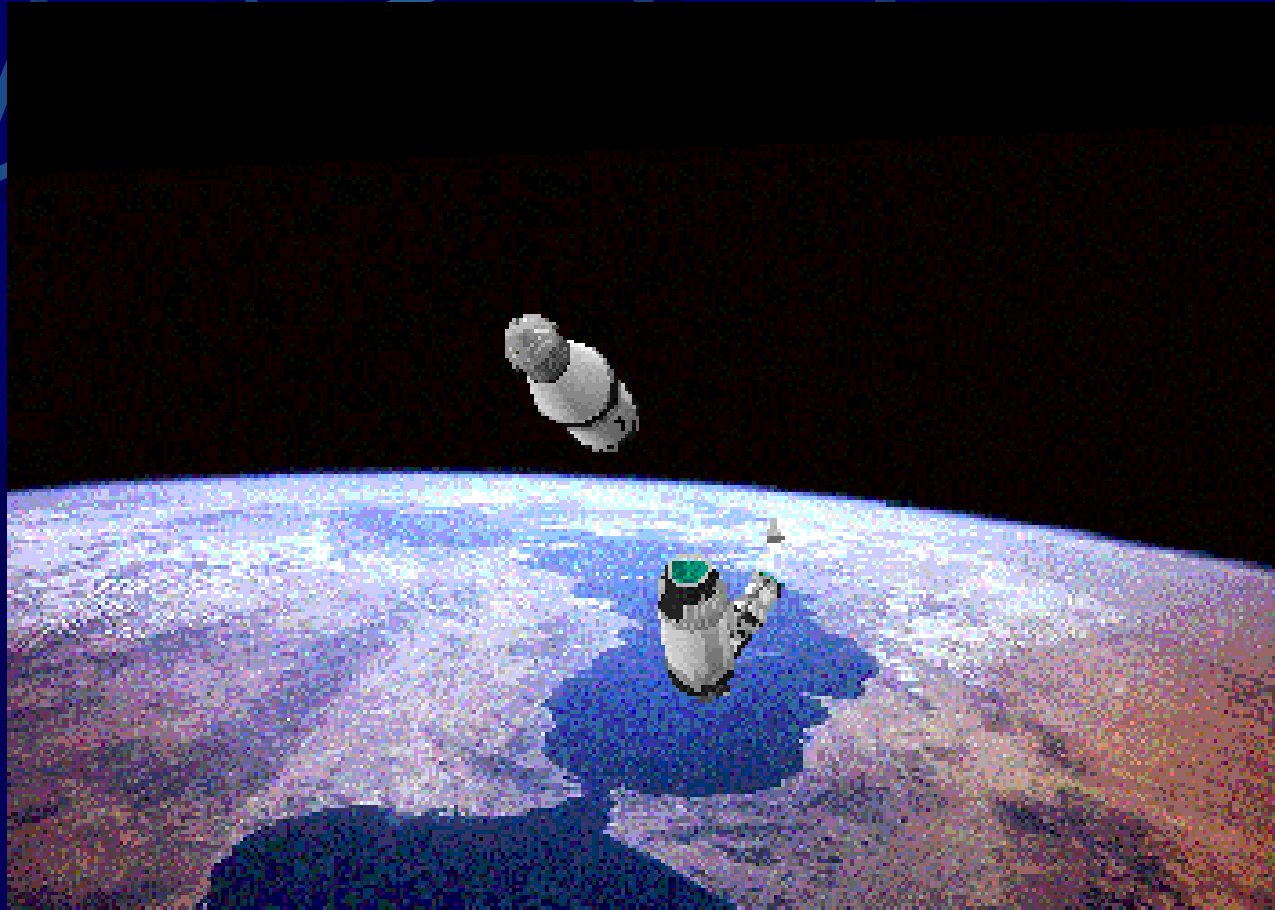


Q: 哪種天體爲拋物線或雙曲線軌道？



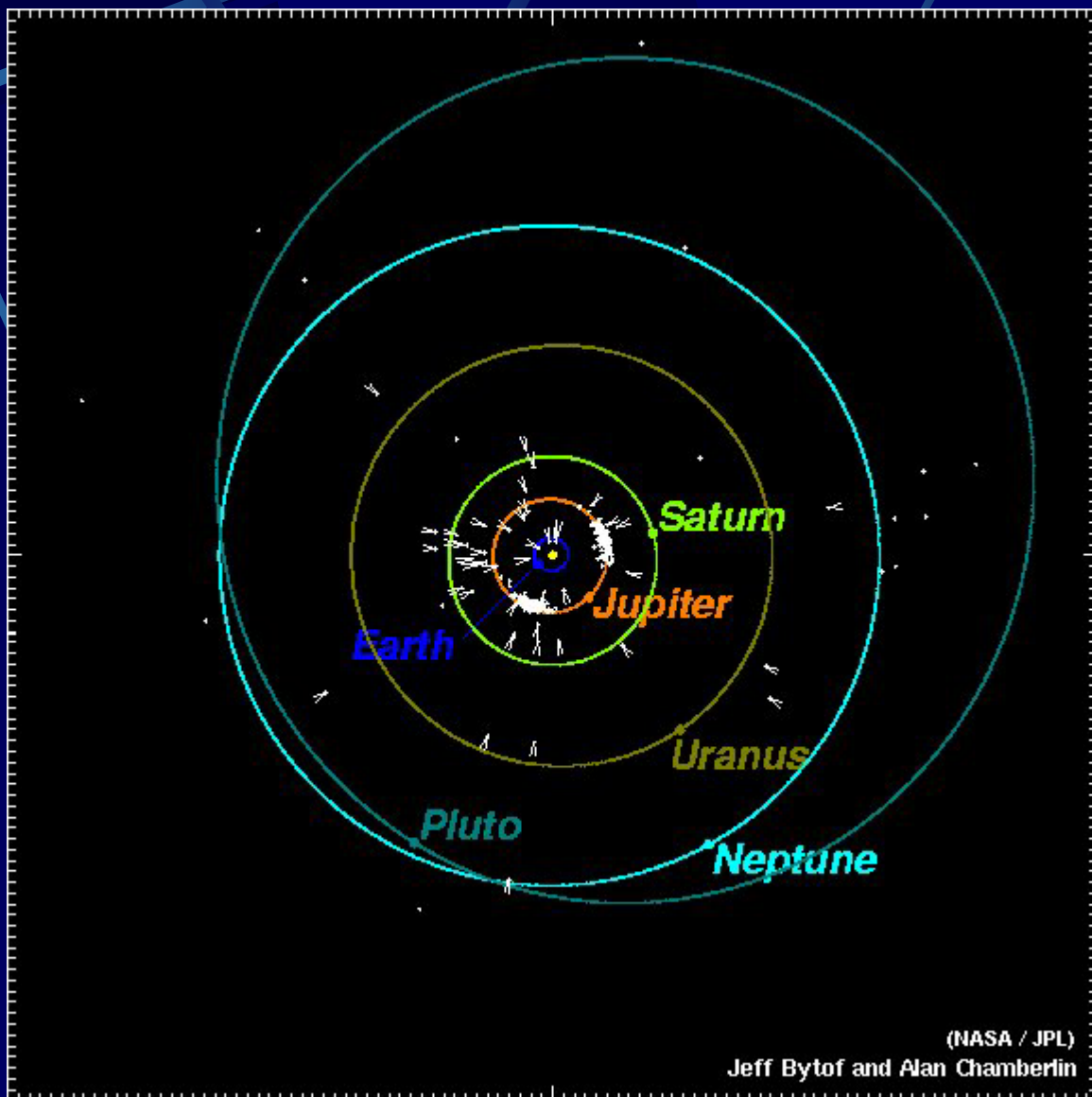
Q: 太陽系中成千上萬的天體幾乎都接近圓形軌道，這有何意義？

Q: 少數天體的軌道為拋物線或雙曲線軌道，這又代表什麼意思呢？



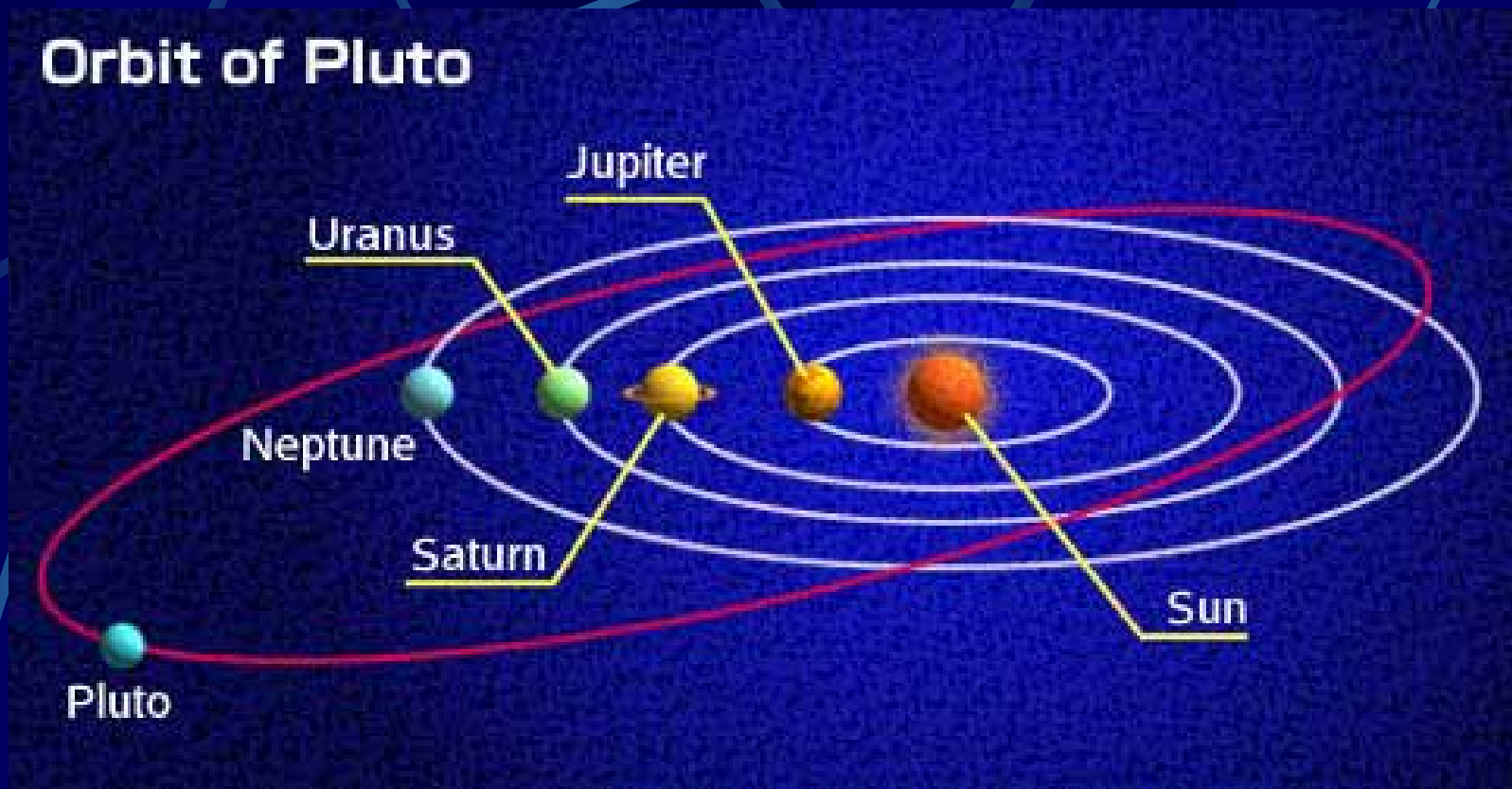
冥王星的橢圓軌道比其他行星狹長，且與黃道面傾角也較大

1979年與1999年之間，冥王星比海王星還更接近太陽





## Orbit of Pluto



冥王星軌道面與黃道面有17度夾角