〈恒星物理学与恒星演化〉

彭秋和

（南京大学天文系）

第一章 恒星的基本性质

§1.1 一些恒星的基本物理量及其测量

§1.2 赫罗图

§1.3 星族

Donald D. Clayton, *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis, page 1 – 74.*

太阳是及其普通的一颗恒星

For the Sun:

$$M_\odot = 1.989 \times 10^{33}\ \mathrm{g}$$

$$R_\odot = 6.96 \times 10^{10}\ \mathrm{cm}$$

$$L_\odot = 3.83 \times 10^{33}\ \mathrm{erg\ s^{-1}}$$

- The Sun, plays a crucial role in our lives:

nuclear reaction → Energy + weather (seasons) → life;

?? synthesize elements (C, O, N) → found in air and our human bodies **??**

§1.1 一些恒星的基本物理量及其测量

1 恒星的光度

2 恒星的表面温度

3 恒星的光谱型

4 恒星的质量

5 恒星的半径

NGC 1850, a rich cluster of perhaps a million stars resides some 150,000 light-years away in the Large Magellanic Cloud

1 恒星的光度

•**光度**L (luminosity)：天体在单位时间内辐射的总能量，是恒星的固有量(总的辐射功率)。 **(`power, [J/s=W], [erg/s])**

•**亮度**F (brightness)：在地球上单位时间单位面积接收到的天体的辐射量。

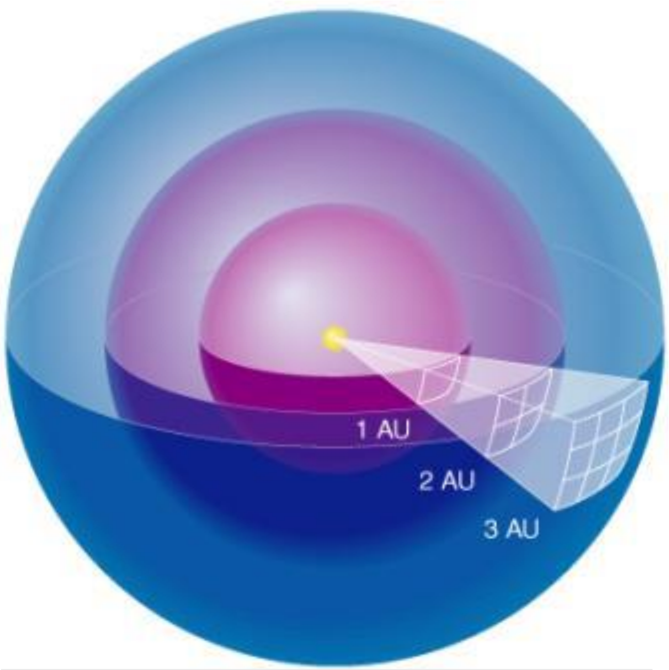
$$L = 4\pi R^2 F, \qquad F \backsim L R^{-2}$$

视亮度的大小取决于三个因素：

天体的光度

天体离我们的距离

星际物质对辐射的吸收和散射



Inverse Square Law of Light

标准烛光法测距

光度L的确定

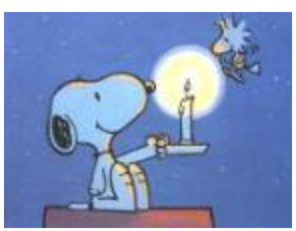
$L = 4\pi R^2 F$

Absorption of earth atmosphere, ISM

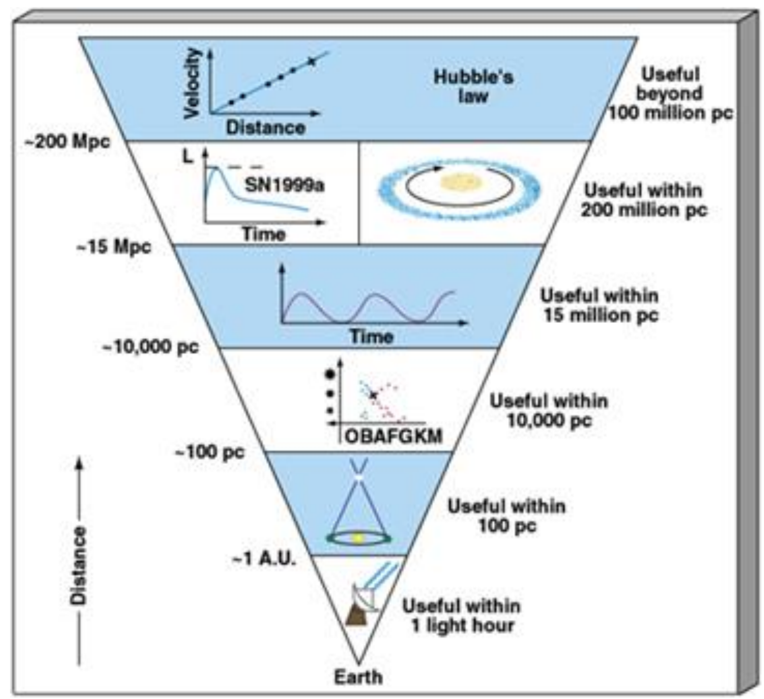
视亮度为可测量的量

需要知道距离

距离的测定方法

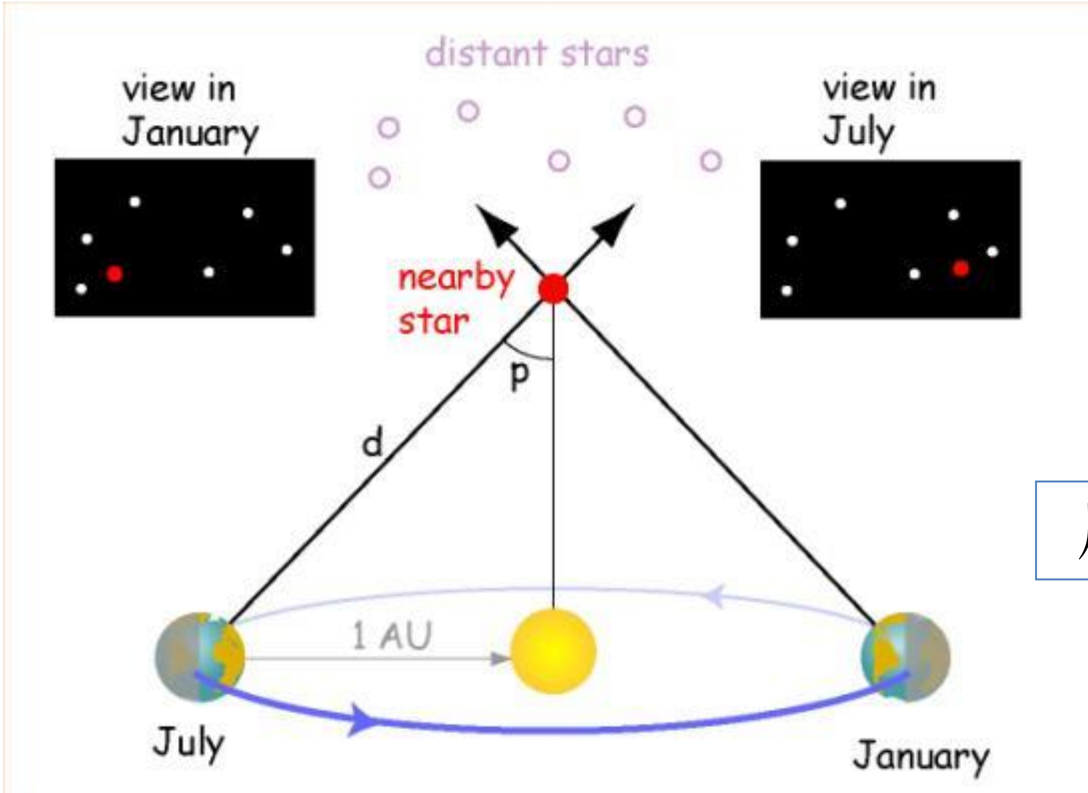


Snoopy



Cosmic distance ladder

几何法测距



周年视差

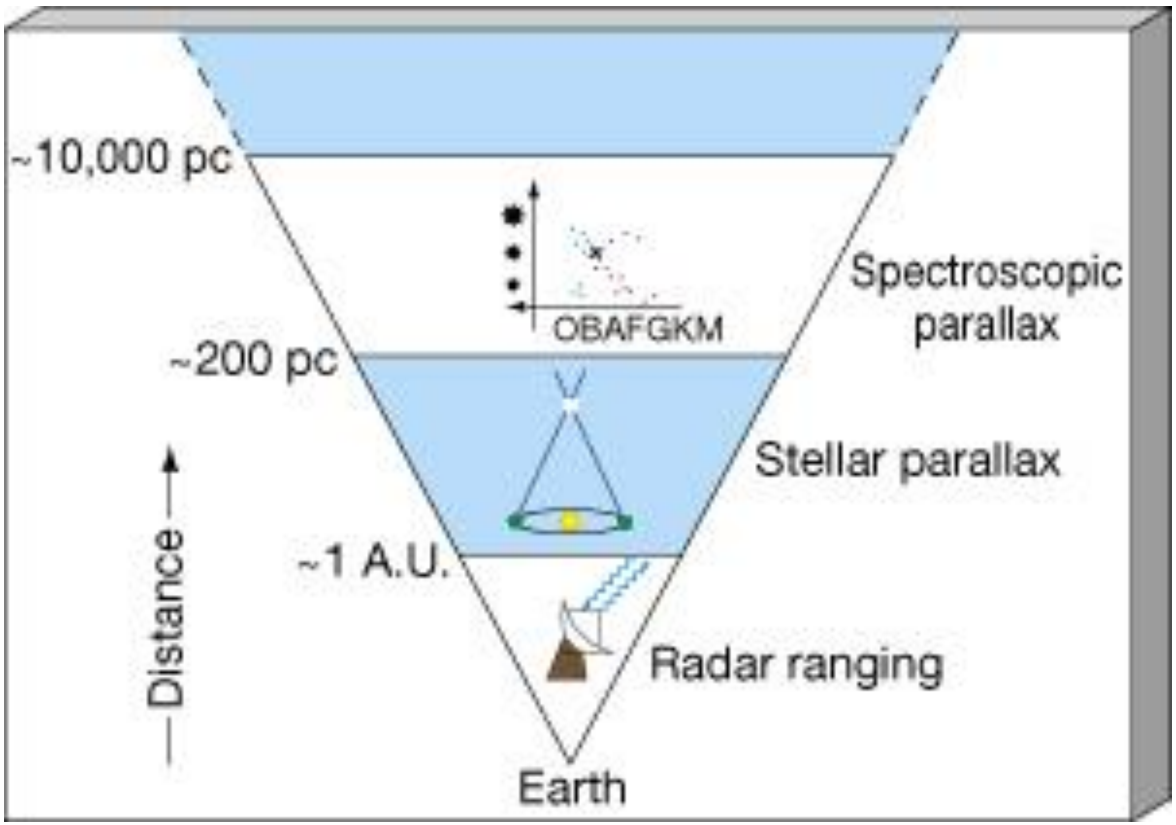
$$\text{distance (in parsecs)} = \frac{1}{\text{parallax angle (in arc seconds)}}$$

1 秒差距 (pc) = **3.086×10^18^** 厘米 (cm) = 3.26光年 (ly) = 206265天文单位 (AU)

•分光视差 (*spectroscopic parallax*) —利用恒星的光谱特征测定恒星的距离。

光谱→绝对星等→距离模数→距离

$d=10^{(m-M+5)/5}$



- **视星等***m* (apparent magnitude)

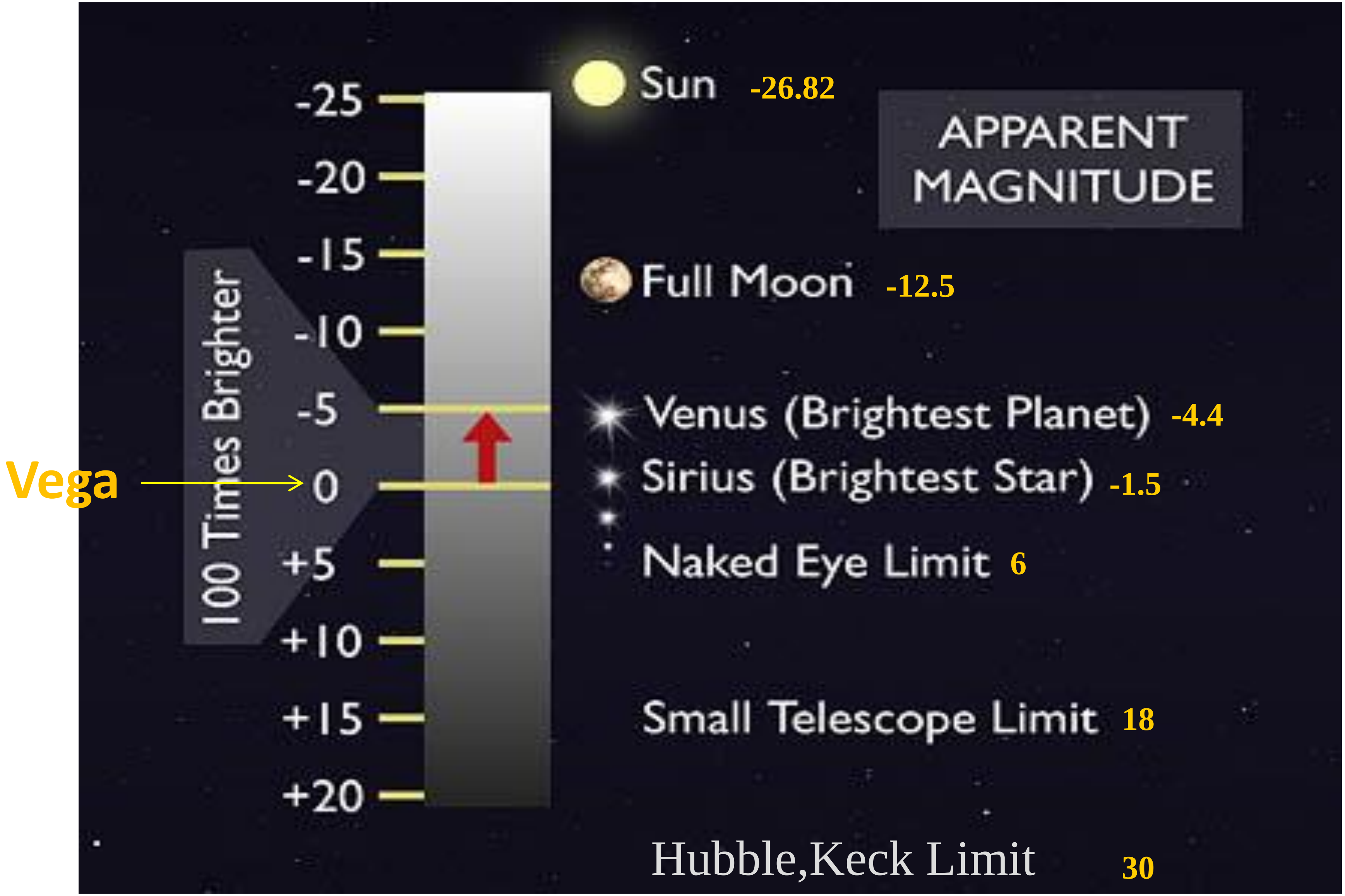
定义

- o 古希腊天文学家Hipparcos在公元前150年左右首先创立的表征恒星亮度的系统（1等星-6等星）。
- o 星等值越大，视亮度越低。
- o 天文学家在此基础上建立了星等系统，定义星等相差5等的天体亮度相差100倍，即星等每相差1等，亮度相差 $(100)^{1/5}=10^{0.4}\approx 2.512$倍。
- o 星等分别为m_1和m_2的恒星亮度之比为

$F_1/F_2 = 10^{-0.4\,(m1-m2)}$

$m_1 - m_2 = -2.5\log\,(F_1/F_2)$

或$m = -2.5\log\,(F/F_0)$，其中F_0为定标常数。



Vega
-25
-20
-15
-10
-5
0
+5
+10
+15
+20
100 Times Brighter
Sun -26.82
APPARENT MAGNITUDE
Full Moon -12.5
Venus (Brightest Planet) -4.4
Sirius (Brightest Star) -1.5
Naked Eye Limit 6
Small Telescope Limit 18
Hubble,Keck Limit 30

- **绝对星等***M* (absolute magnitude)

人为将天体置于10 pc 距离处的视星等，它实际上反映了天体的光度。

银纬，银经

对同一颗恒星：

$F_{10}/F_{d} = (10/d)^{-2} = 10^{-0.4\,(M\,-\,m)}$

$\boldsymbol{M - m = -2.5 \log(F_{10}/F_{d}) = 5 - 5 \log d\ (\mathrm{pc}) - A(b, l, d)}$

对不同的恒星：

星际消光改正

$M_1 - M_2 = -2.5 \log (L_1/L_2)$

$M - M_{\odot} = -2.5 \log (L/L_{\odot})$

其中$L_{\odot} = 3.86 \times 10^{33}$ $\mathrm{ergs^{-1}}$, $M_{\odot} = 4.75^{\mathrm{m}}$

距离模数 (distance modulus)： $m - M$

$d = 10^{(m-M+5)/5}$ pc

- 视星等的种类

视星等的测量通常是在某一波段范围内进行的。

根据测量波段的不同，视星等可以分为目视星等、照相星等和光电星等，在全波段测量得到的星等称为热星等(*Bolometric Magnitude*)。

UBV测光系统(采用不同的滤光片)。

U (ultraviolet) -紫外波段星等 (300 – 370 nm)

B (blue) -蓝光波段星等(380 – 480 nm)

V (visual) -可见光波段星等(490 – 590 nm)

UBVY测光系统。

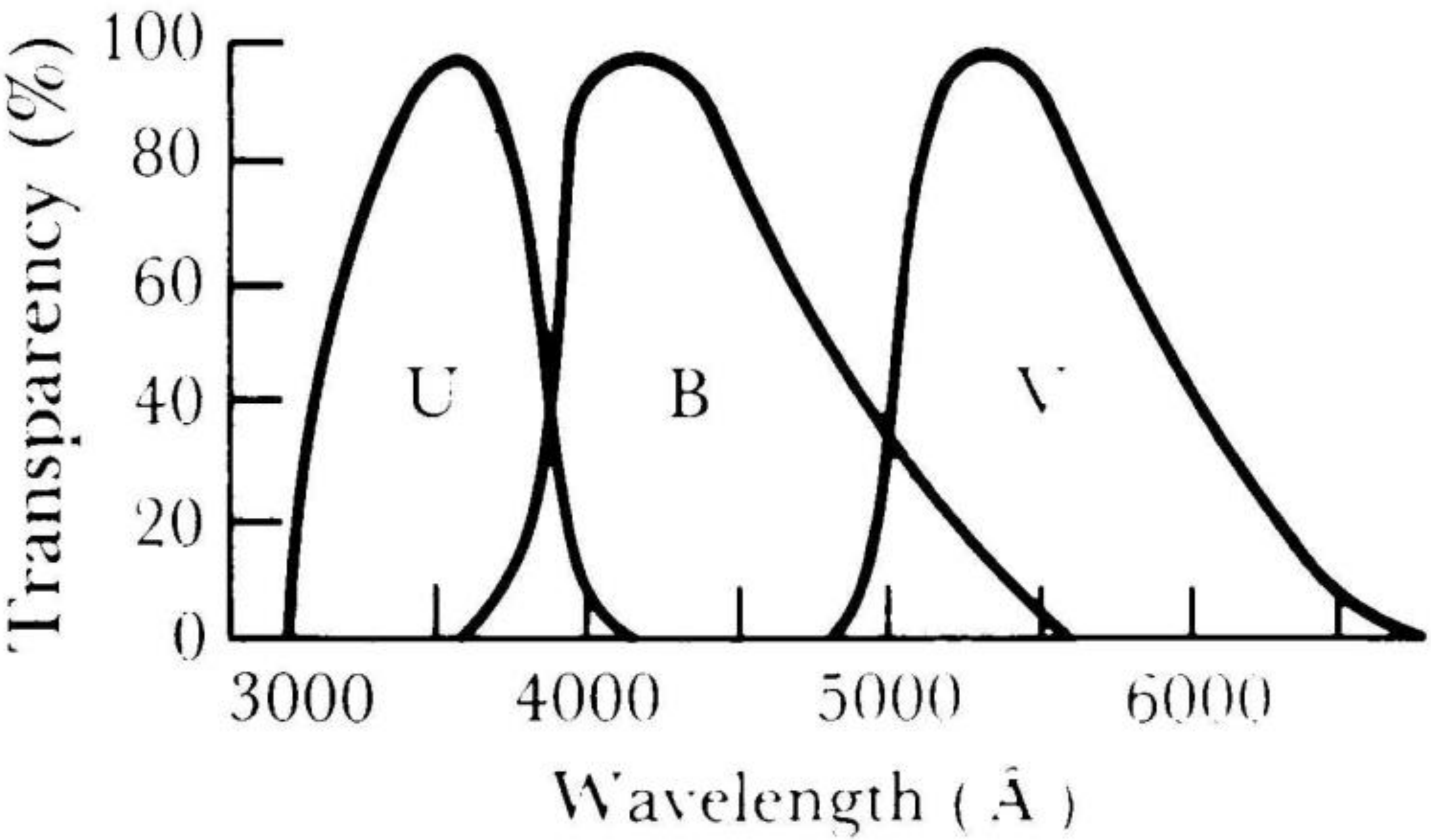
UBVRI测光系统

太阳
5.61
5.48
4.83

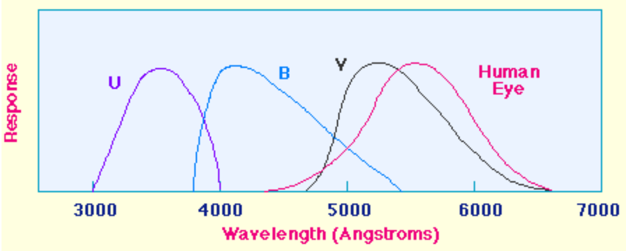
Central wavelengths λ and full widths at half maximum W for common bands are:

Band	U	B	V	R	I
λ / nm	365	445	551	658	806
W / nm	66	94	88	138	149

UBV滤光片的透光率



http://csep10.phys.utk.edu/astr162/lect/light/wien.html



Notice

恒星的总光度由三部分组成

$$\boxed{L = L_\gamma + L_\nu + L_{\dot{m}}}$$

L_γ 为光子携带的光度(*Photon Luminosity*)，在辐射平衡下能量损失率正比于恒星内部的温度梯度。

L_ν 为中微子携带的光度(*Neutrino Luminosity*)，对绝大多数稳定的恒星中微子光度远小于光子的光度。

$L_{\dot{m}}$ 为抛射质量带走的能量(*Mass-loss Luminosity*)，太阳的质量损失率为4 ⑨ $10^{-14}\,M_\odot$每年。

恒星光度(optical)范围

10^{-5}~10^{6} $L_\odot$

Observation show that: Highly luminous stars are very rare; the majority of nearby stars are far less luminous than the Sun.

2 恒星的表面温度

The Planck spectrum serves as the fundamental definition of radiative intensity and as the reference for determining temperature on the basis of the properties of radiation.

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{(e^{h\nu/kT}-1)}$$

Brightness Temperature: (Radiation temperature)	We can set the brightness temperature equal to that which is required to give us the intensity of the radiation:

$$I_\nu = B_\nu(T_\mathrm{b}) \tag{10}$$

Color Temperature	Derived by comparing I_ν at two different values of ν.
Effective Temperature	Derived by setting the total flux equal to what would come from a black body.
Excitation Temperature	Derived by examining the ratio of species abundances at two different excitation energies.
Ionization Temperature	Derived by comparing the relative abundance of two different ionization levels.
Kinetic Temperature	A measure of the average random motion of the particles in a system.
Electron temperature	Defined by determining the *Maxwell* distribution of velocities for electrons.

1）有效温度 (The Effective Stellar Temperature)

恒星的光球辐射近似可看为绝对黑体辐射，利用Stefan-Boltzmann 公式确定的温度为**恒星的有效温度**。

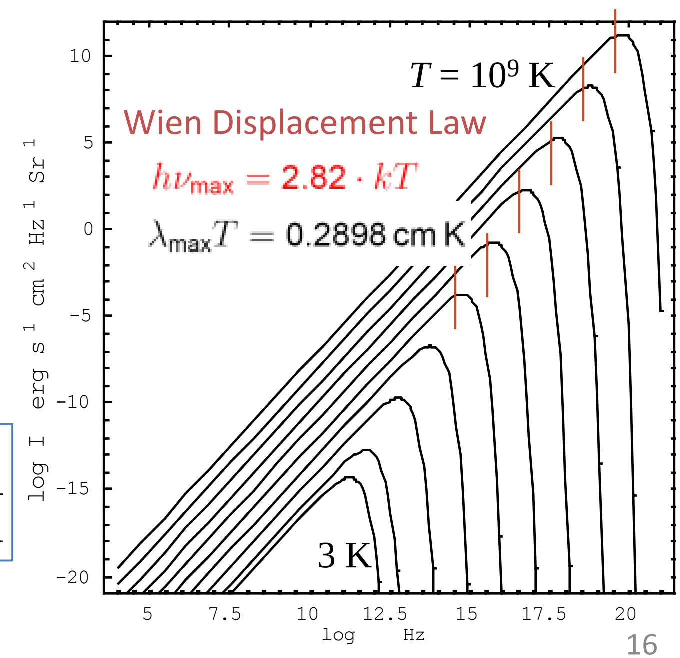
单位面积黑体辐射的功率 $F = \sigma T^4$

总的黑体辐射的功率 $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$

其中Stefan-Boltzmann常数

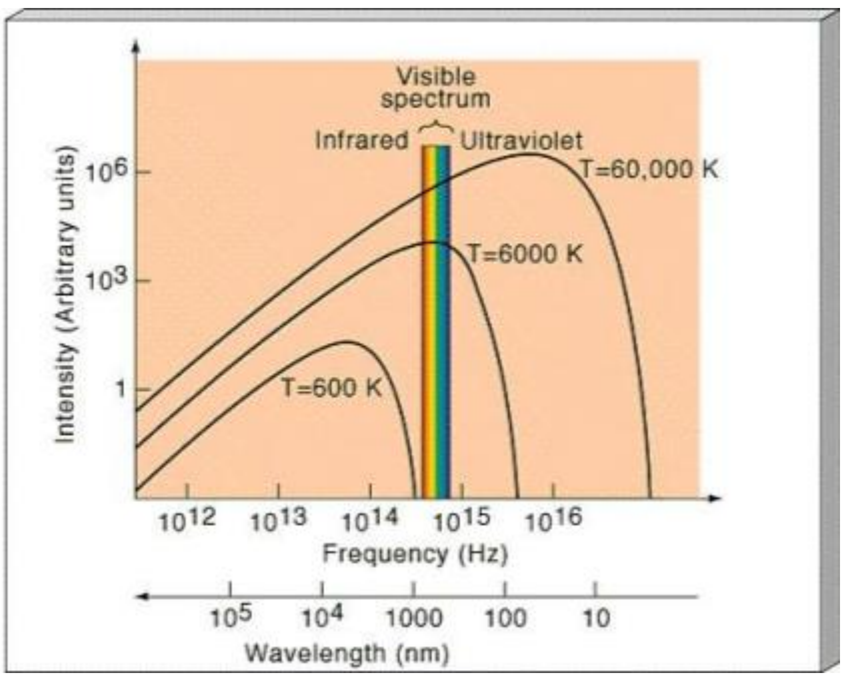
$\sigma = 5.67 \times 10^{-5}$ erg cm^{-2}s^{-1} K^{-4}

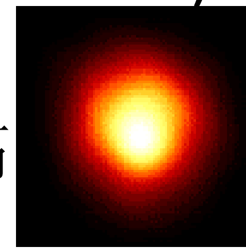
$$I_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1}$$



2）色温度 (The Color Temperature)

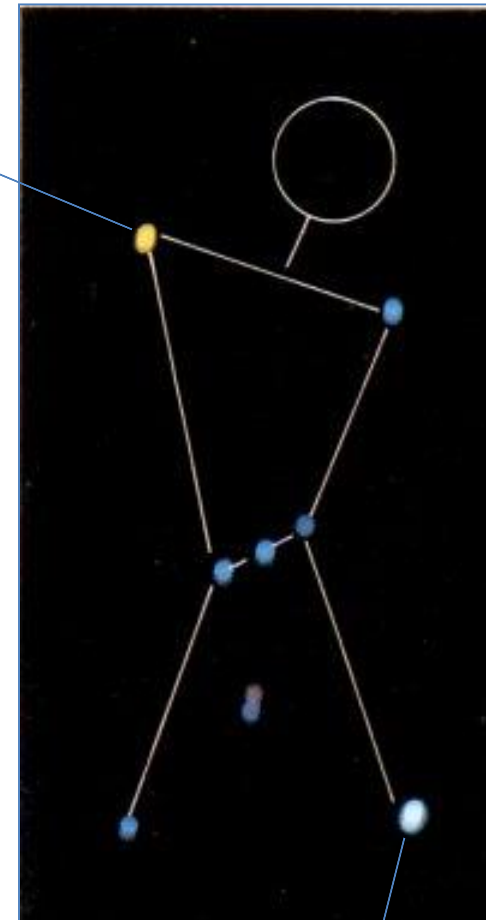
- 由Wein位移定律知恒星的颜色反映了恒星的表面温度的高低。
- 温度越高（低），颜色越蓝（红）。





Betelgeuse

猎户星座中的一等星



Rigel

参宿七

恒星的颜色:		Blue-violet	30,000 surface temp
	»	blue	20,000 surface temp
	»	white	10,000 surface temp
	»	yellow white	7000 surface temp
	»	yellow	6000 surface temp
	»	orange	4000 surface temp
	»	red	3000 surface temp

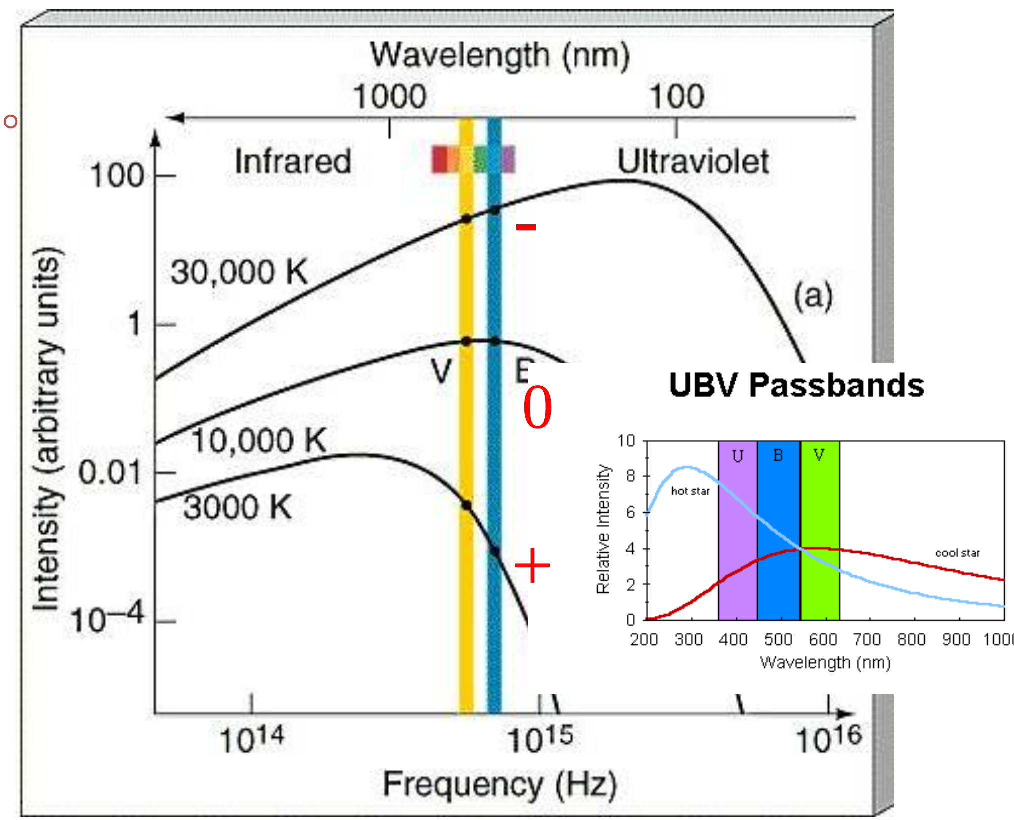
一般，人们并不是从整个电磁波段的连续光谱来确定其平均温度，通常采用滤光片，对一段波的连续辐射谱同黑体辐射谱的吻合来确定其表面温度。

色指数 (color index) —在不同波段测量得到的星等之差，如U-B, B-V等。由于天体的颜色和辐射谱的形状取决于表面温度的高低，色指数的大小反映了天体的温度。

$$T = \frac{8540\ \mathrm{K}}{c + 0.865}$$

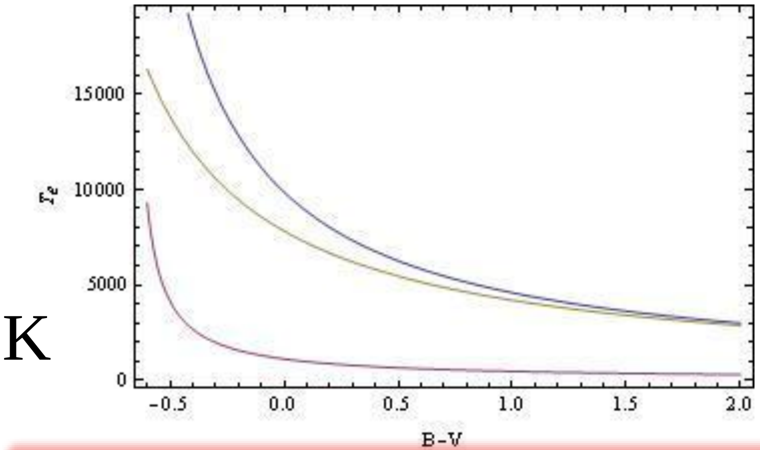
$$c = B - V$$

色指数



Stellar Colors and Temperatures

COLOR INDEX		SURFACE TEMPERATURE (K)
B intensity/ V intensity	B magnitude – V magnitude	
1.3	-0.28	30,000
1.0	0.0	10,000
0.55	0.65	6,000
0.21	1.7	3,000



较准确的经验公式为：

主序星 $$T_e = \frac{746}{(B-V)+0.68}\,\mathrm{K}$$

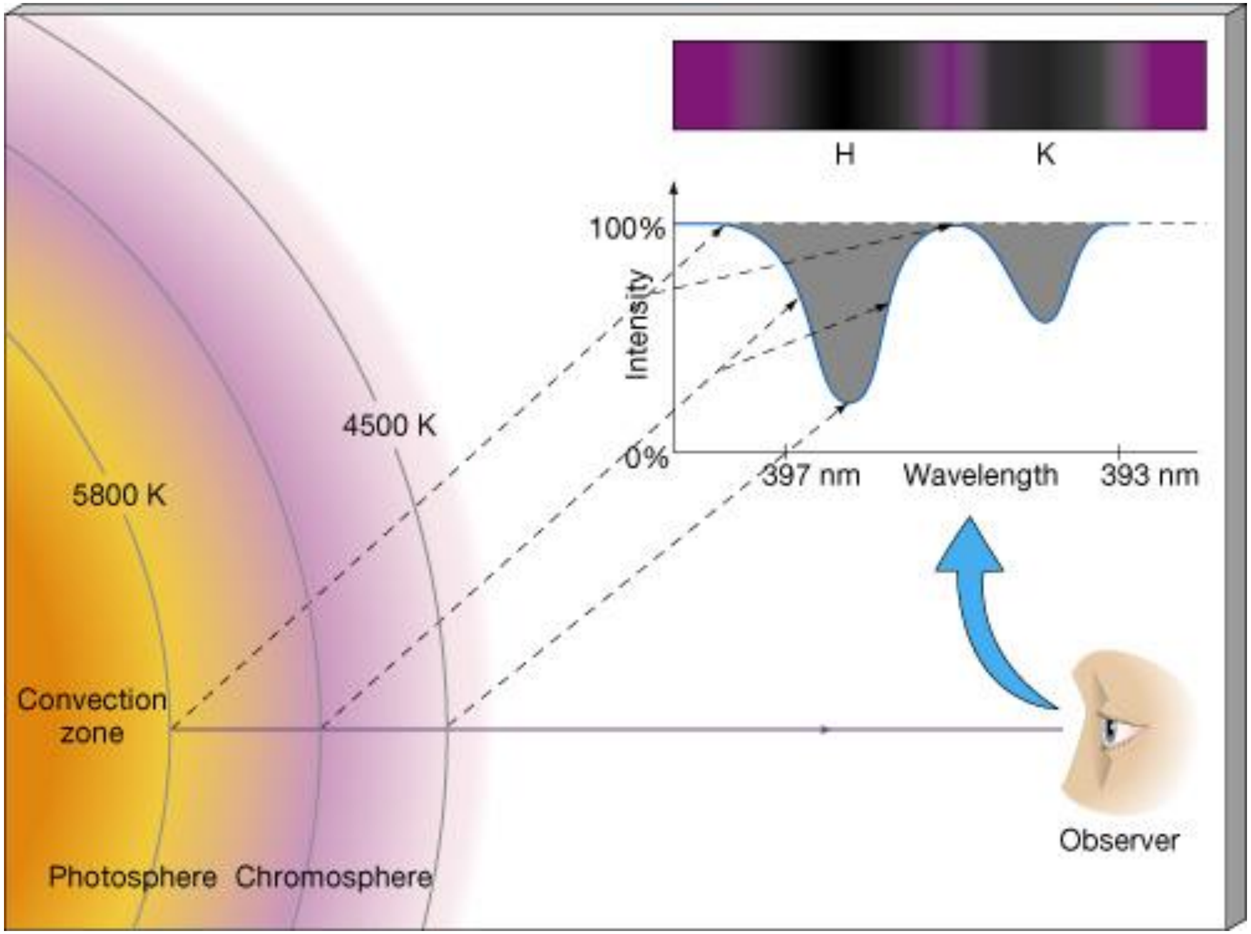
巨　星 $$T_e = \frac{9000}{C+1.15}\,\mathrm{K}$$

Homework: For perfect BB, please fit your phenomenon formula of temperature-color index

Other temperature - color relation:

T = 8065 - 3580 (B-V) (1.0 - 0.196 [Fe/H]); (0.3<B-V<0.63)

若是严格的黑体辐射。则色温度=有效温度，但往往二者有差别，一般定义的色温度都略高于有效温度，特别当恒星表面温度非常高时。



Spectral Line Formation Photons with energies well away from any atomic transition can escape from relatively deep in the photosphere, but those with energies close to a transition are more likely to be reabsorbed before escaping, so the ones we see on Earth tend to come from higher, cooler levels in the solar atmosphere. The inset shows a close-up tracing of two of the thousands of solar absorption lines, the “H” and “K” lines of calcium at about 395 nm.

3）激发温度 (The Excitation Temperature)

恒星内部物质通常满足Boltzmann分布，利用**Boltzmann公式**

$$\frac{n_{r,k}}{n_{r,i}}=\frac{g_{r,k}}{g_{r,i}}\cdot e^{-(\varepsilon_{r,k}-\varepsilon_{r,i})/kT}$$

其中$\boldsymbol{n_{r,k}}$表示 r 次电离的离子处于 k 能级上的原子数密度，$\boldsymbol{g_{r,k}}$为此能级的简并度， ✰$_{r,k}$为它相应的激发能。$\boldsymbol{k}$ 为Boltzman常数。

分析同一种原子处于两个不同激发态的原子数的比,由此式可以定出恒星大气的温度——称为**激发温度**

4）电离温度 (The Ionization Temperature)

r+1次电离原子数密度n_{r+1}同 r 次电离原子数密度n_r之间由**Saha公式**决定的：

$$\frac{n_{r+1}}{n_r}n_e=\frac{G_{r+1}}{G_r}g_e\cdot\frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3}e^{-\chi_r/kT}$$

其中n_e为自由电子数密度，m_e为电子质量，h为普朗克常数，χ_r为r次电离原子的电离电势。$g_e=2$为自由电子的自旋简并度。

$$G_r\equiv G_{r(T)}=\sum_{i=0}^{\infty}g_{r,i}e^{-\varepsilon_{r,i}/kT}$$

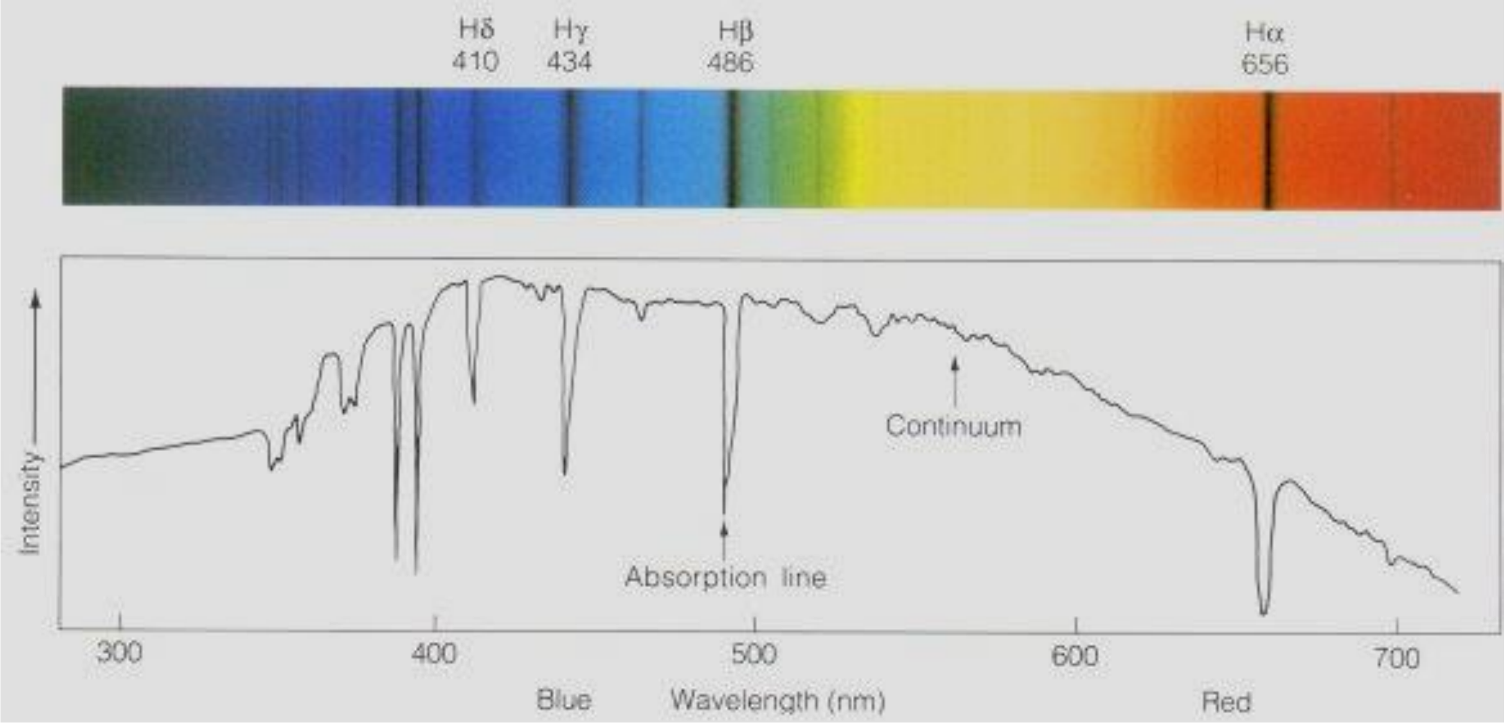
为r次电离原子的配分函数。

比较同一种原子处于两种电离级上的原子数目比。由此式可以定出恒星的表面温度——称为**电离温度**

3 恒星的光谱型(Spectral classes *or* Spectral types)

- 恒星光谱

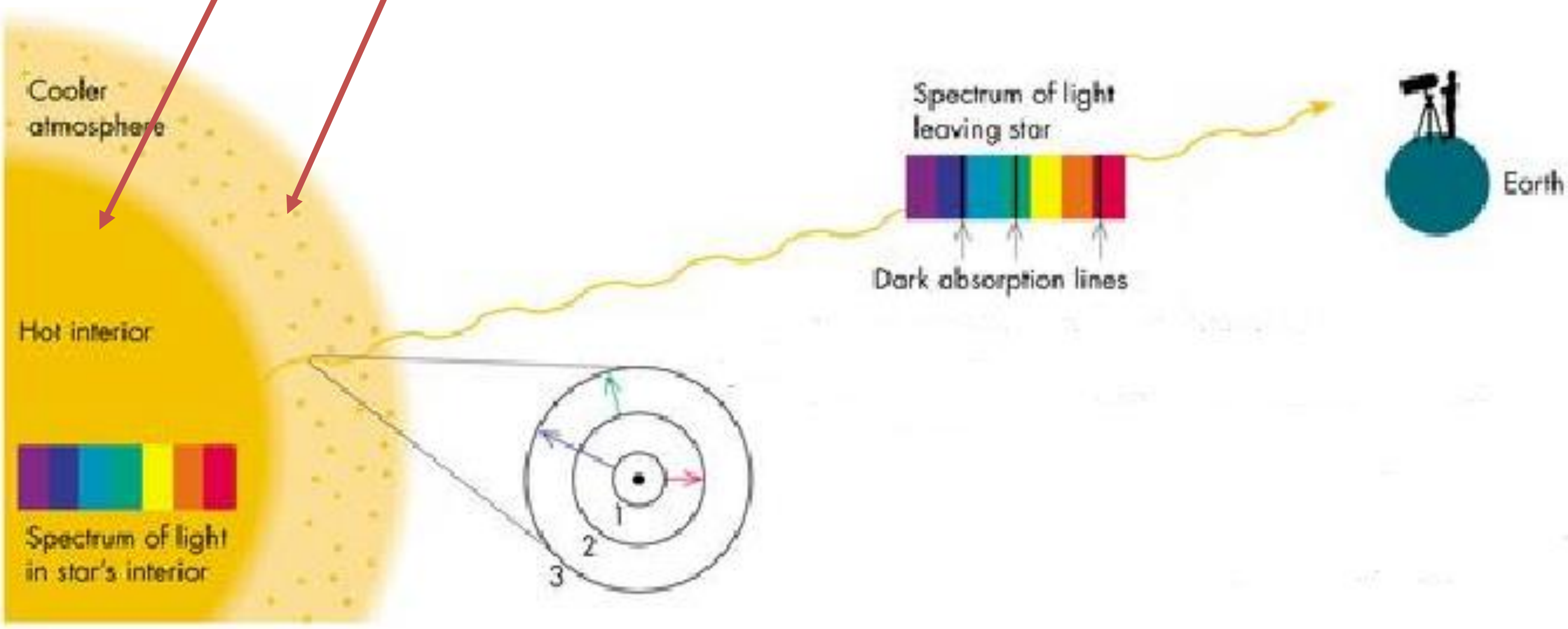
典型的恒星光谱由连续谱和吸收线构成。



- 恒星光谱的形成

  恒星的连续谱来自相对较热、致密的恒星内部。
    (photospher)

  吸收线来自较冷、稀薄的恒星大气。



• 恒星的温度与光谱

恒星的表面温度还反映为恒星的特征谱线强度。

例如， A型星的H线最强，温度比A型星低或高的恒星，H线较弱。

Ionization potentials I for several relevant species:

以氢为例

H	He I	He II	Ca I	Ca II	Fe I
13.6 eV	24.6 eV	54.4 eV	6.1 eV	11.9 eV	7.9 eV

As a rough rule of thumb, ionization occurs in a stellar atmosphere when,

$$kT_{\rm ion} \sim \frac{1}{10} I$$

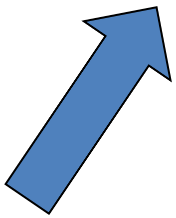
i.e. at *much lower* temperatures than you would naively expect from expressing I in temperature units (why?). Numerically,

$$T_{\rm ion} \sim 11,600 \left(\frac{I}{10 \text{ eV}} \right) \text{ K}$$

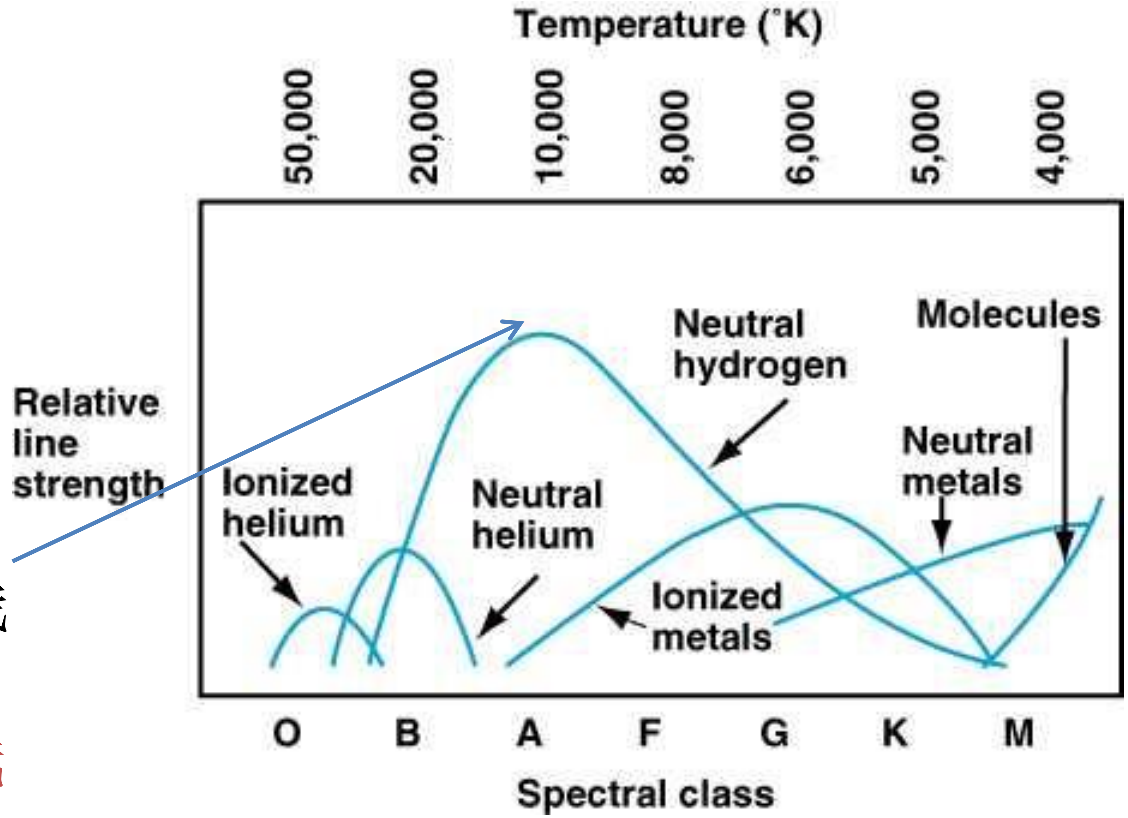
Appearance of lines of a given element reaches a maximum when T_e in the atmosphere is comparable to $T_{\rm ion}$, e.g.,

$T > 20,000$ K $\rightarrow$ all H ionized, no lines

$T < 5,000$ K $\rightarrow$ all H in $n = 1$ state, no Balmer lines from transitions to $n = 2$ state



Explain in class



例如， A型星的H线最强，温度比A型星低或高的恒星， **H线**较弱。

Classification of stars based on the absorption line spectrum:

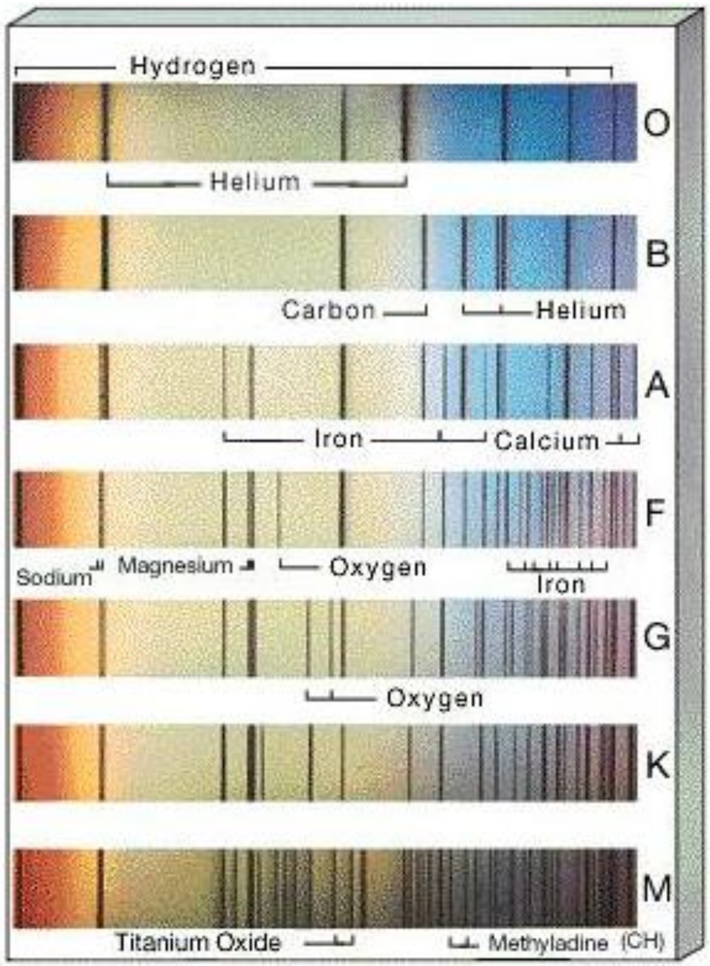
Spectral Classification

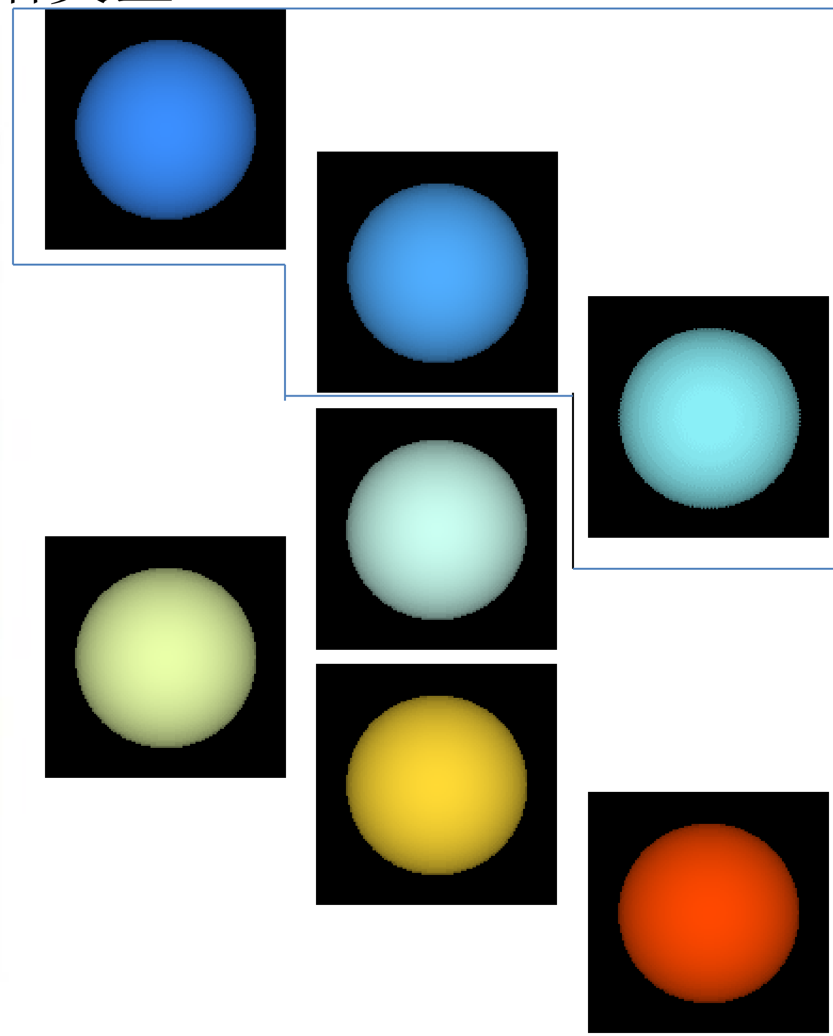
按照恒星光谱中最为明显的吸收线的类型（物理原因），通常把恒星划分为7种主要的光谱类型。

早型星

中型星

晚型星





Oh, Be A Fine Guy (Girl), Kiss Me!

光谱型	表面温度(K)	颜色	特征谱线
O	> 25,000	蓝紫	强电离He线，重元素多次电离线，无氢线。
B	11,000 ~ 25,000	蓝白	中性He线，重元素一次电离线，很弱的H线
A	7,500~11,000	白	强H线，重元素一次电离线（如Ca^{+}）
F	6,000 ~ 7,000	黄白	重元素一次电离线，弱H线和中性金属线
G	5,000 ~ 6,000	黄	强重元素一次电离线，中性金属线
K	3,500 ~ 5,000	红橙	强中性金属线，重元素一次电离线
M	< 3500	红	强分子带，中性金属线，无氢线

❖ 每一种光谱型可以继续分为0-9十个次型。数字越**小**温度越**高**。太阳的光谱型为G2 。

问 : 自然界有没有绿色的恒星?

恒星的光谱序列

S

O — B — A — F — G — K — M

R — N

光球层内s-过程的核素超丰。很大一部分为变星。

碳超丰，the ratio [C/O] 比正常恒星高出4~5倍。

Wolf-Rayet Stars (W)

T Tauri Stars (T)

Spectral Sequence Mnemonics

Oh, Be A Fine Guy (Girl), Kiss Me!

-- Start, Right Now !

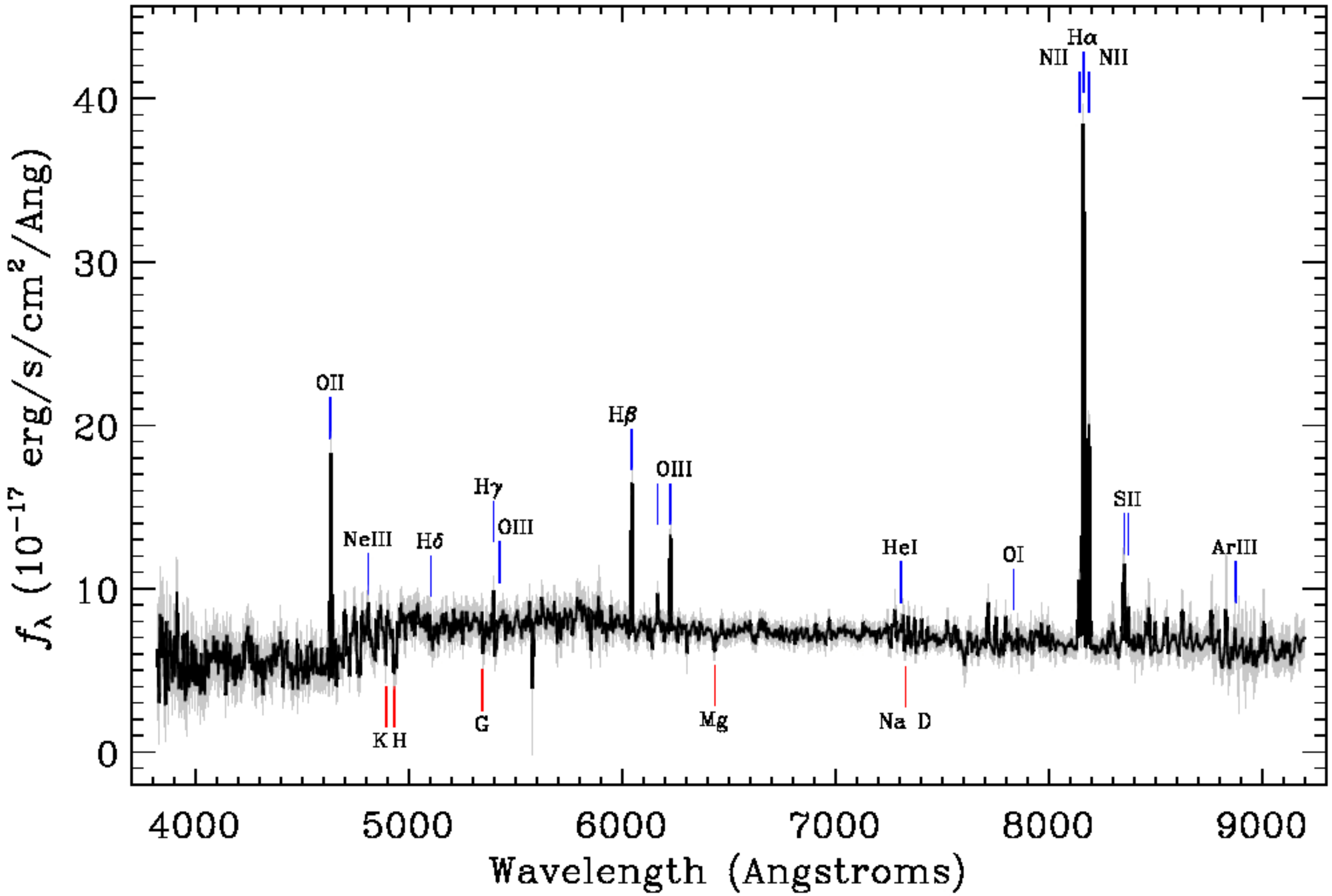
On Bad Afternoons Fermented Grapes Keep Mrs. Richard Nixon Smiling

Spectroscopy

Spectral analysis provides:

- Redshift/distance
- Composition
- Velocity/dynamics

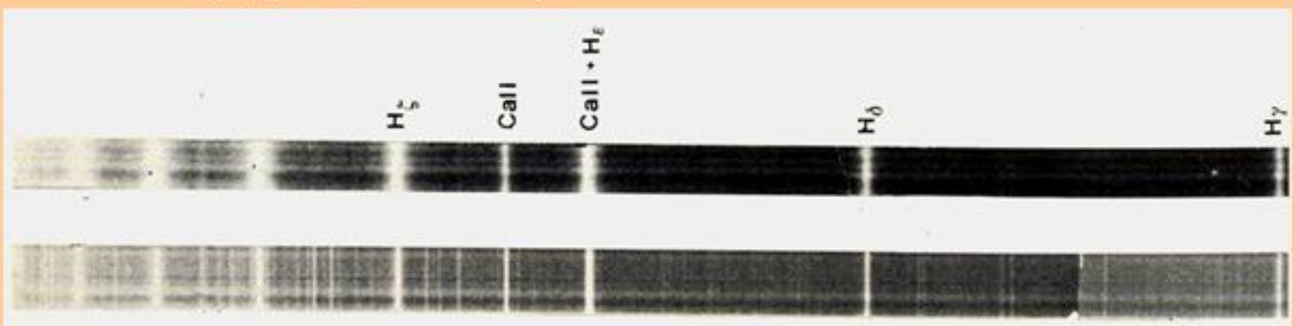
z=0.24315±0.00001 Class=GALAXY STARBURST
No warnings.



$z=0$ - Stars

Plate spectra

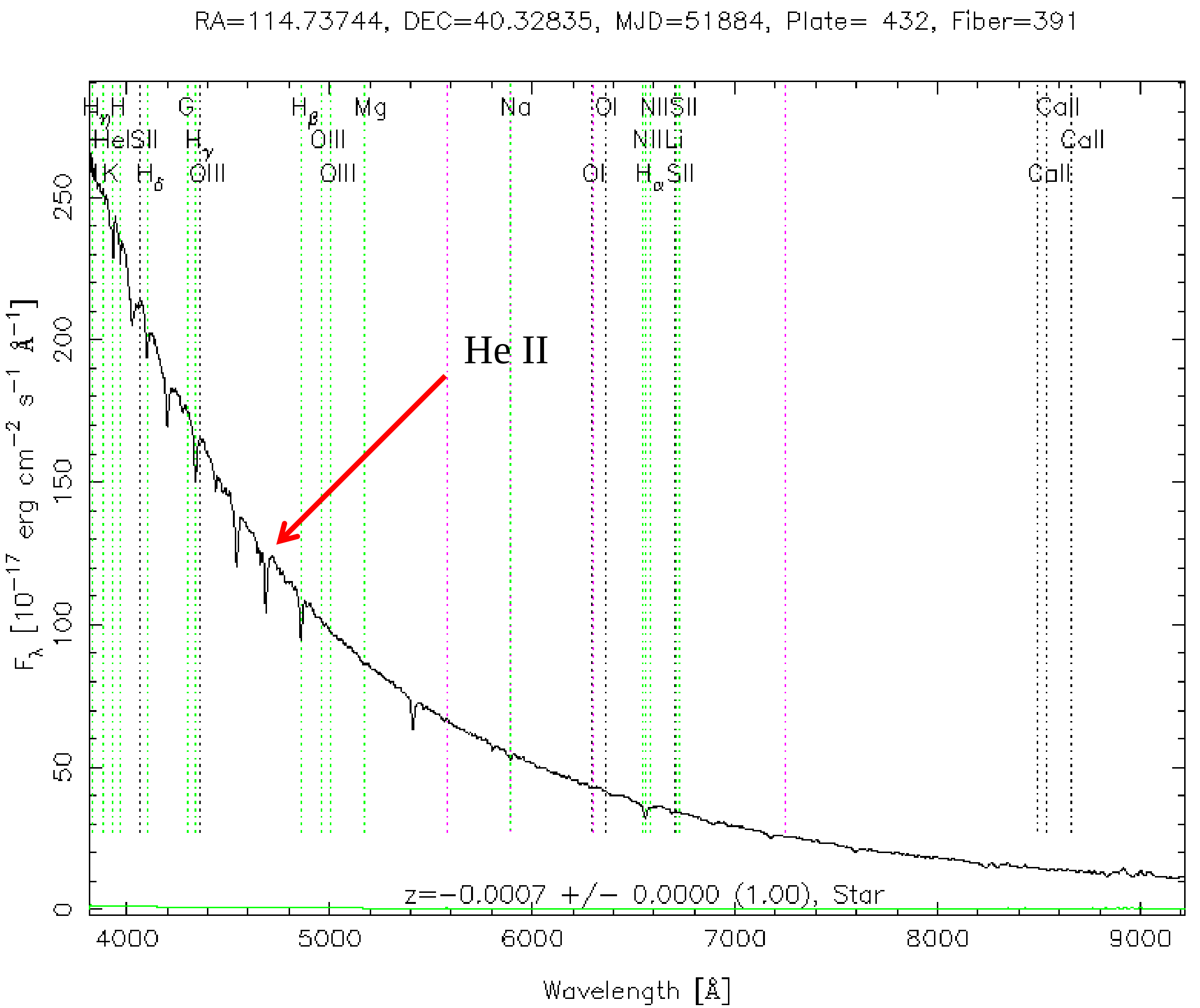
Dwarf and Supergiant sprectra in comparison



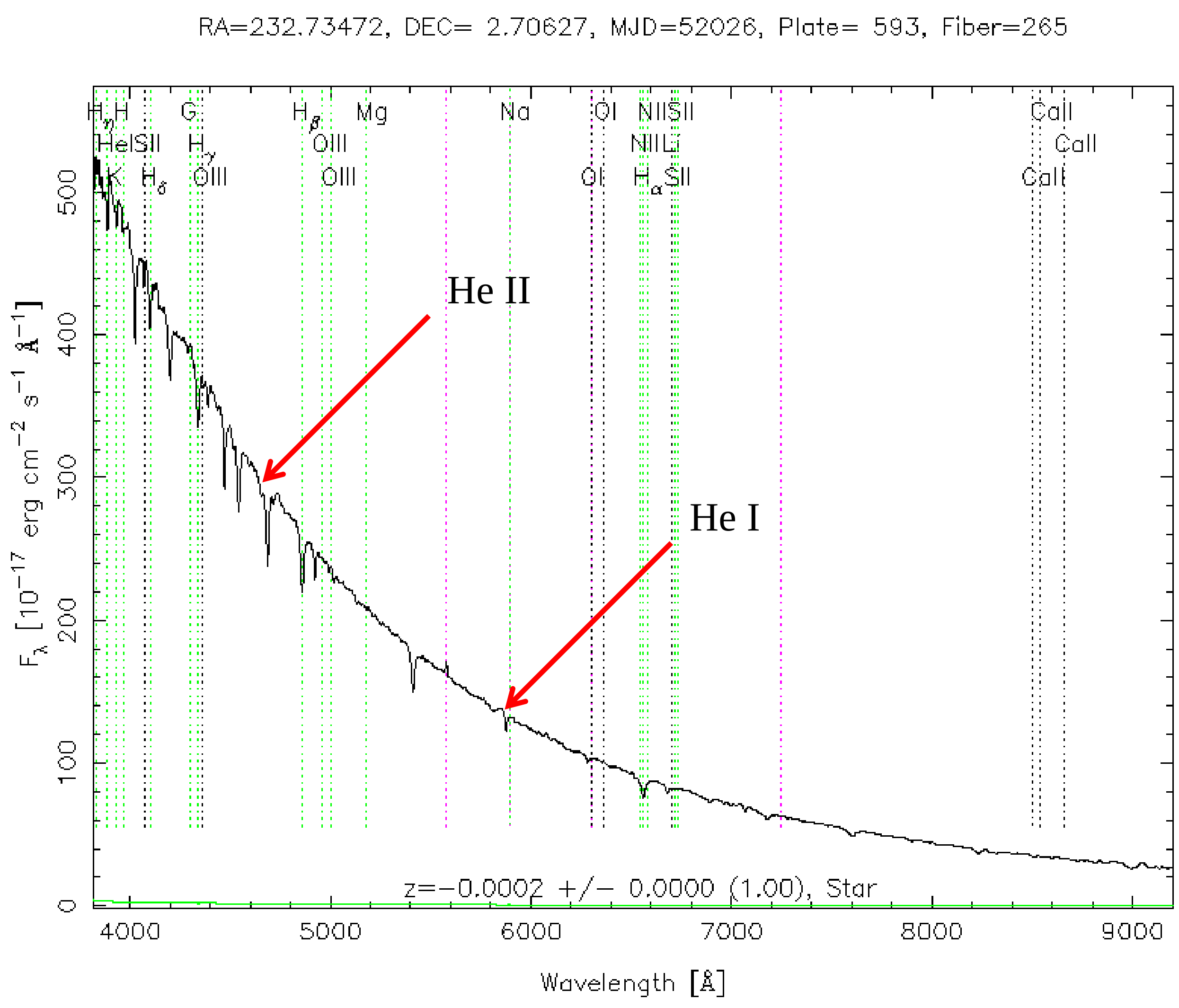
Above: normal star
Below: supergiant star

Note wide and diffuse hydrogen and calcium lines in normal stars atmosphere, against the extreme sharpness of the same lines in the supergiant atmosphere.

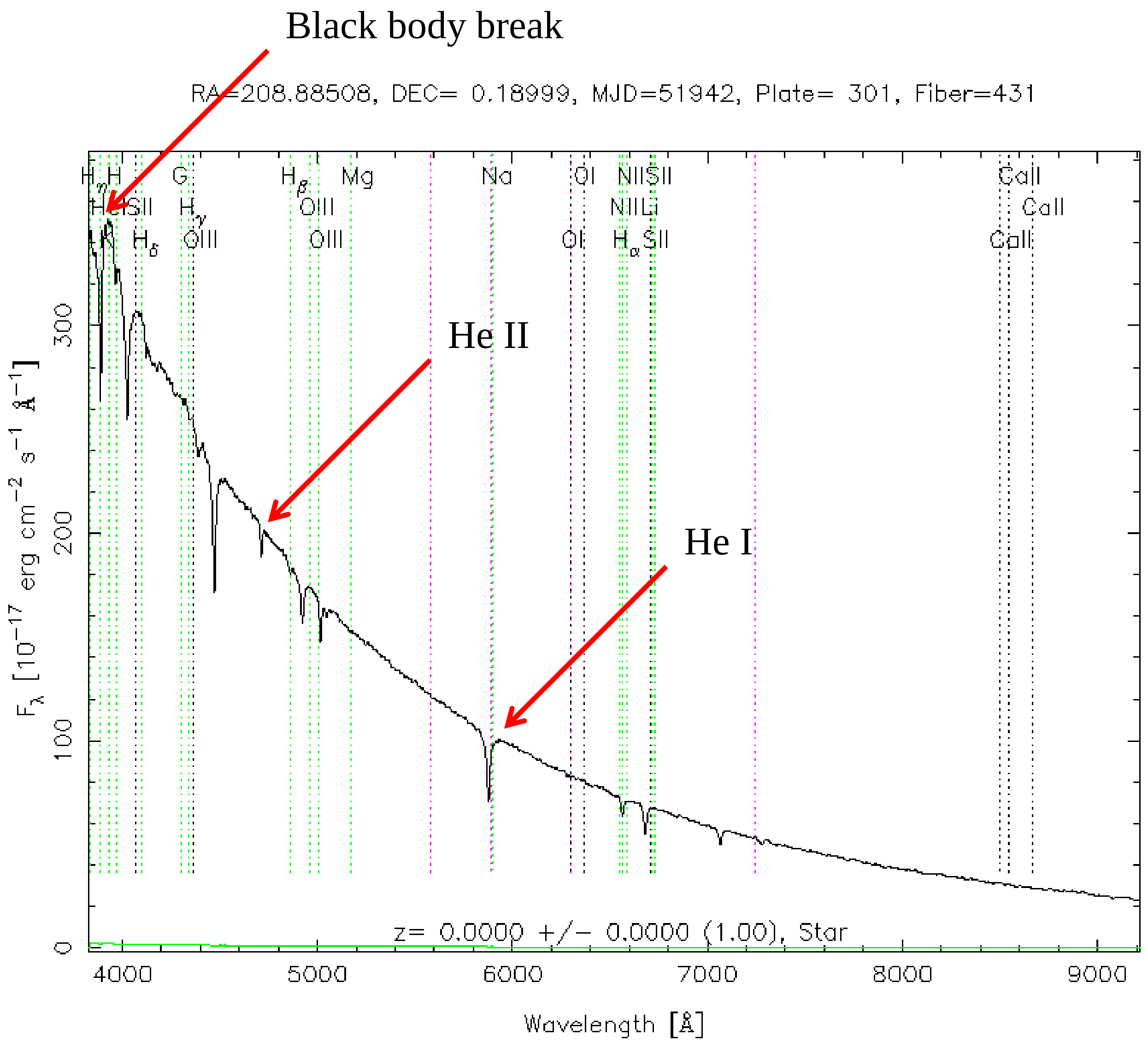
Modern stellar spectra: O star



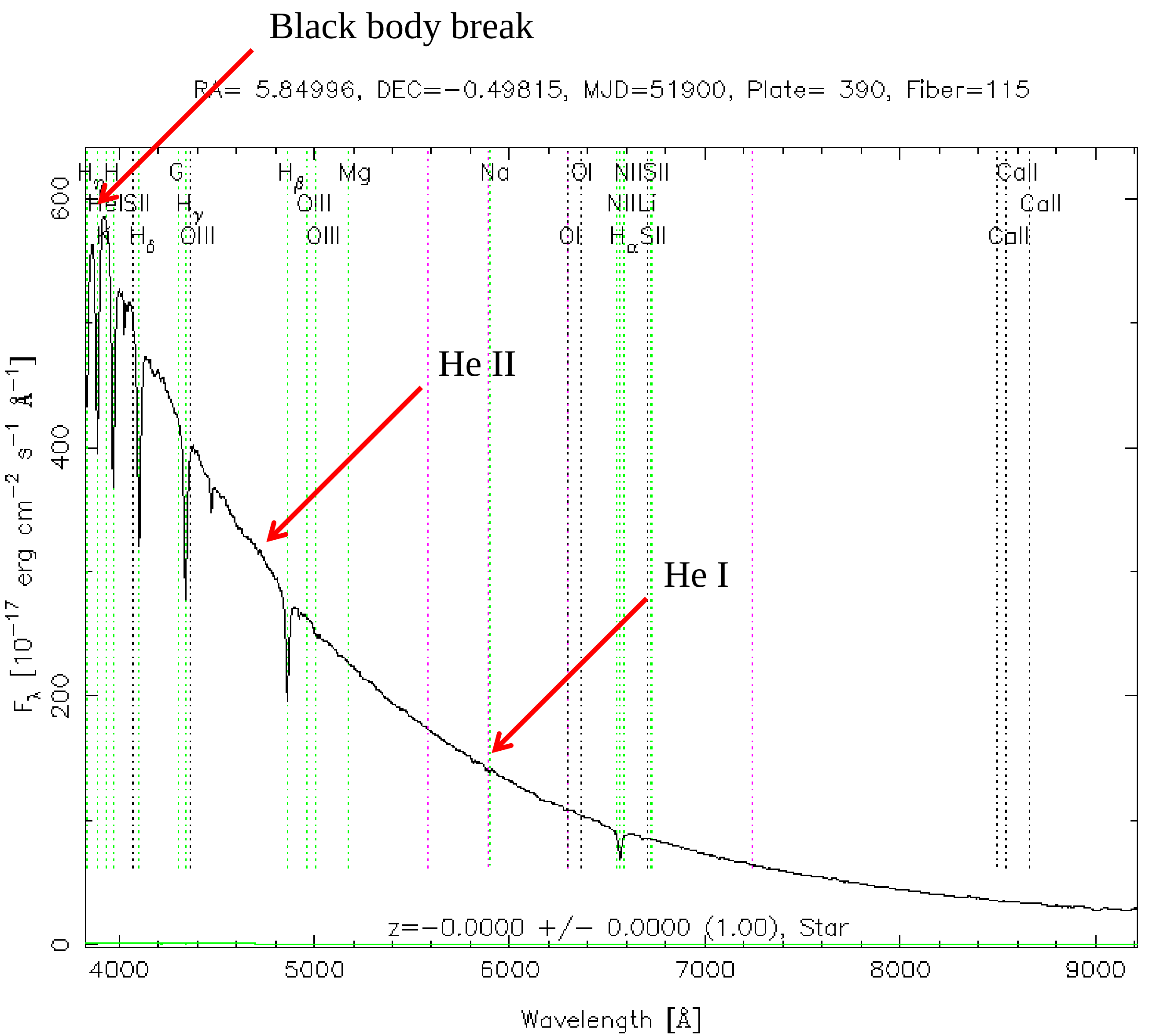
Modern stellar spectra: O/B



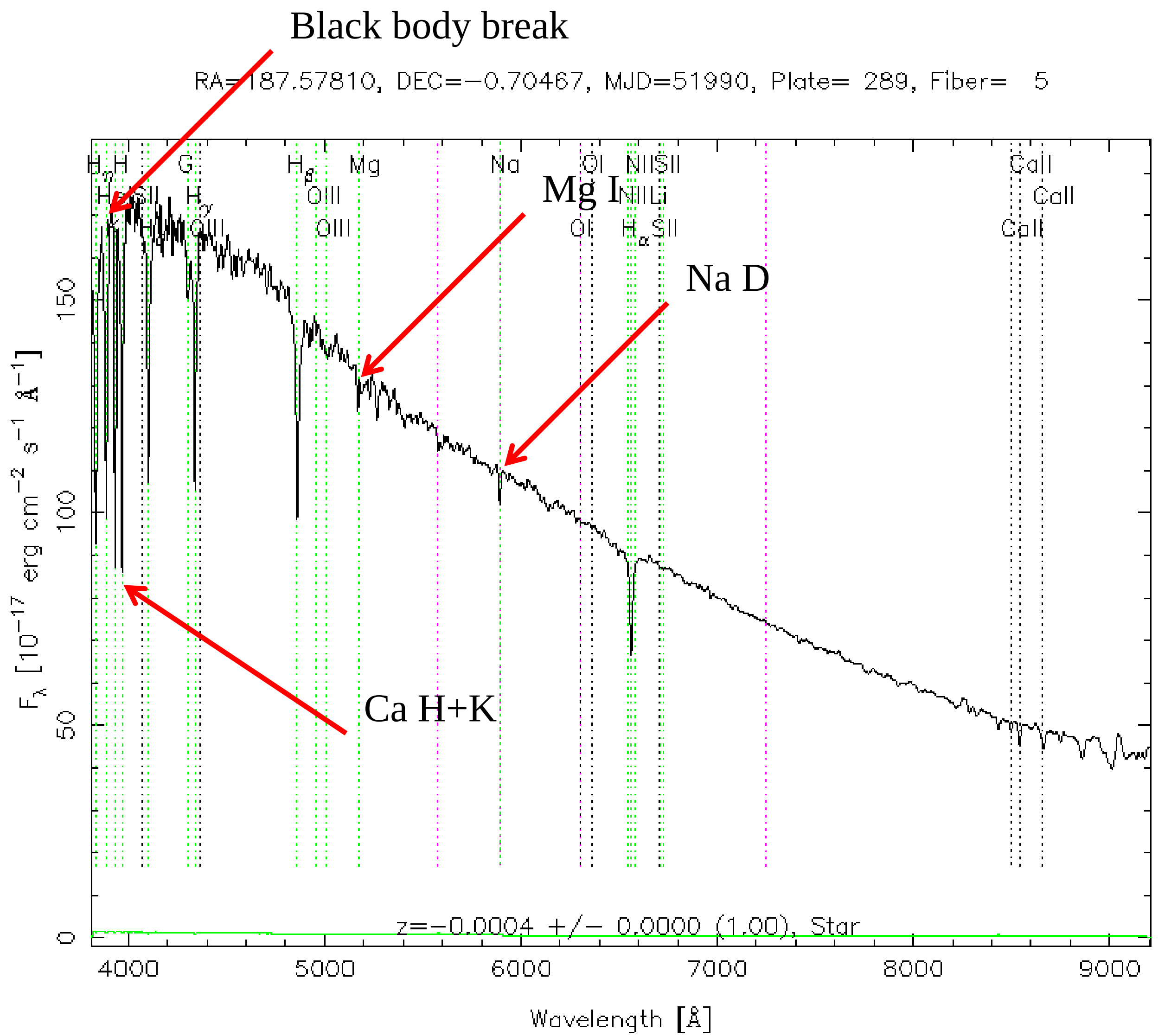
Modern stellar spectra: B



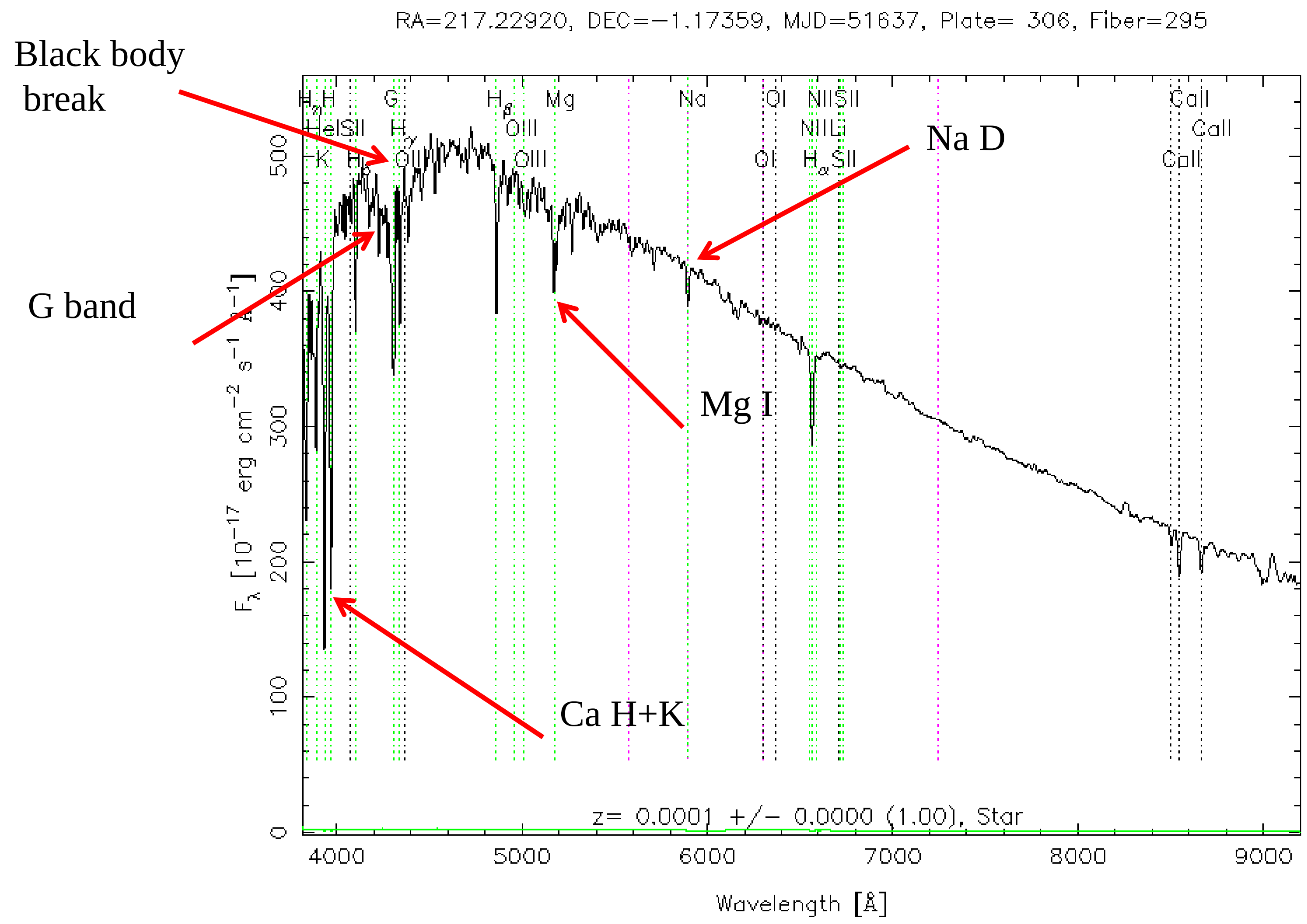
Modern stellar spectra: A



Modern stellar spectra: F

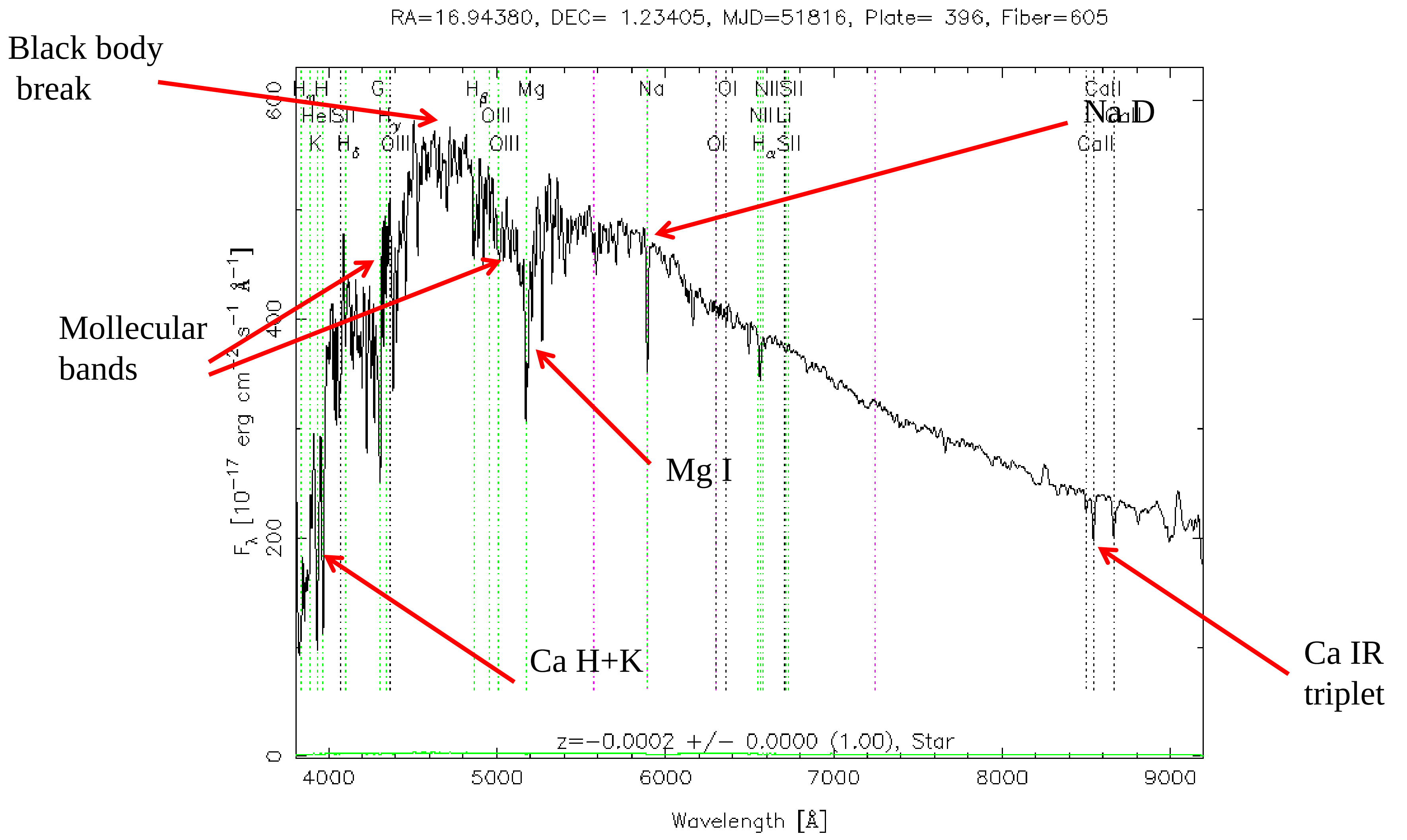


Modern stellar spectra: F

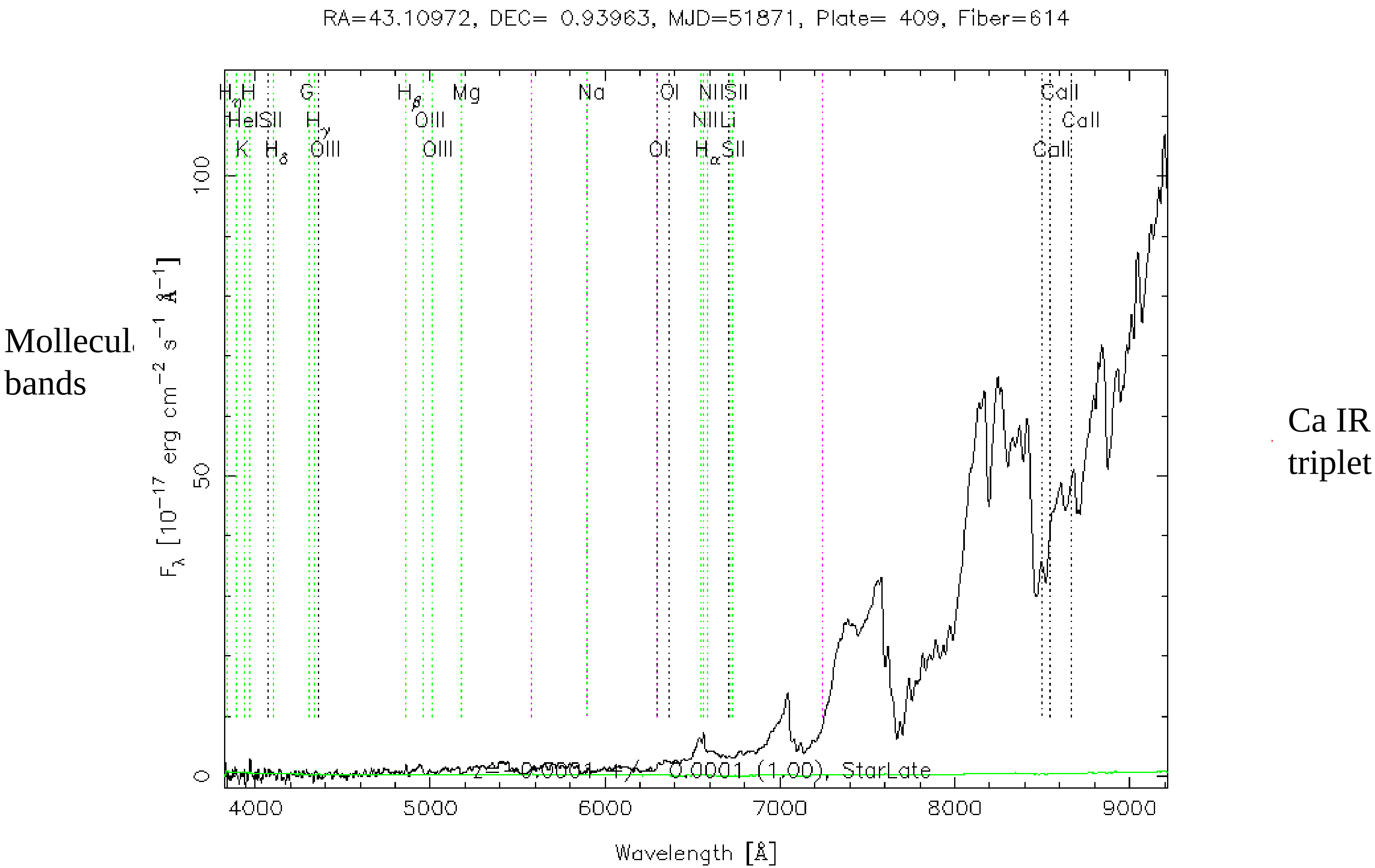


Modern stellar spectra: G

Modern stellar spectra: K

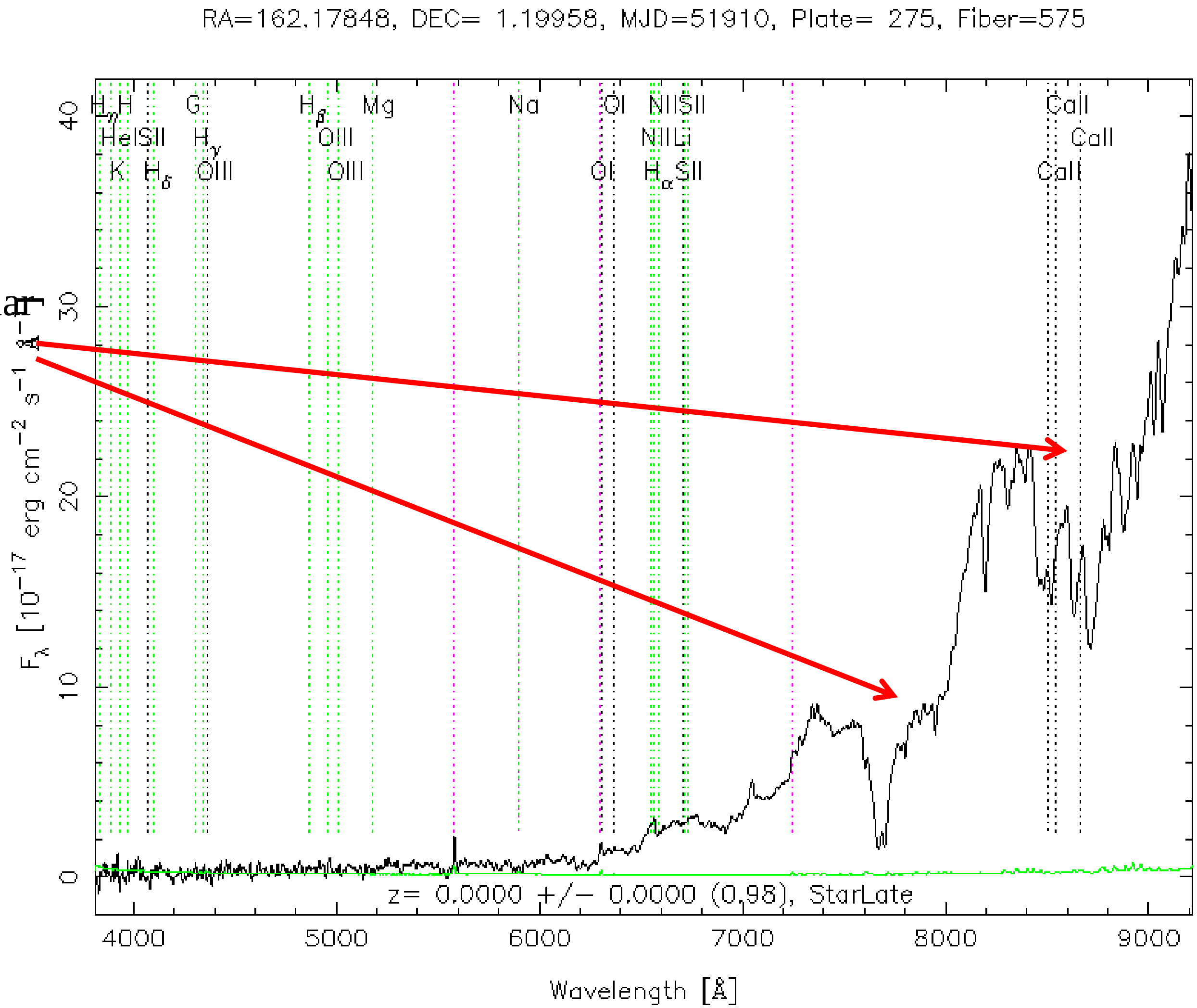


Modern stellar spectra: M

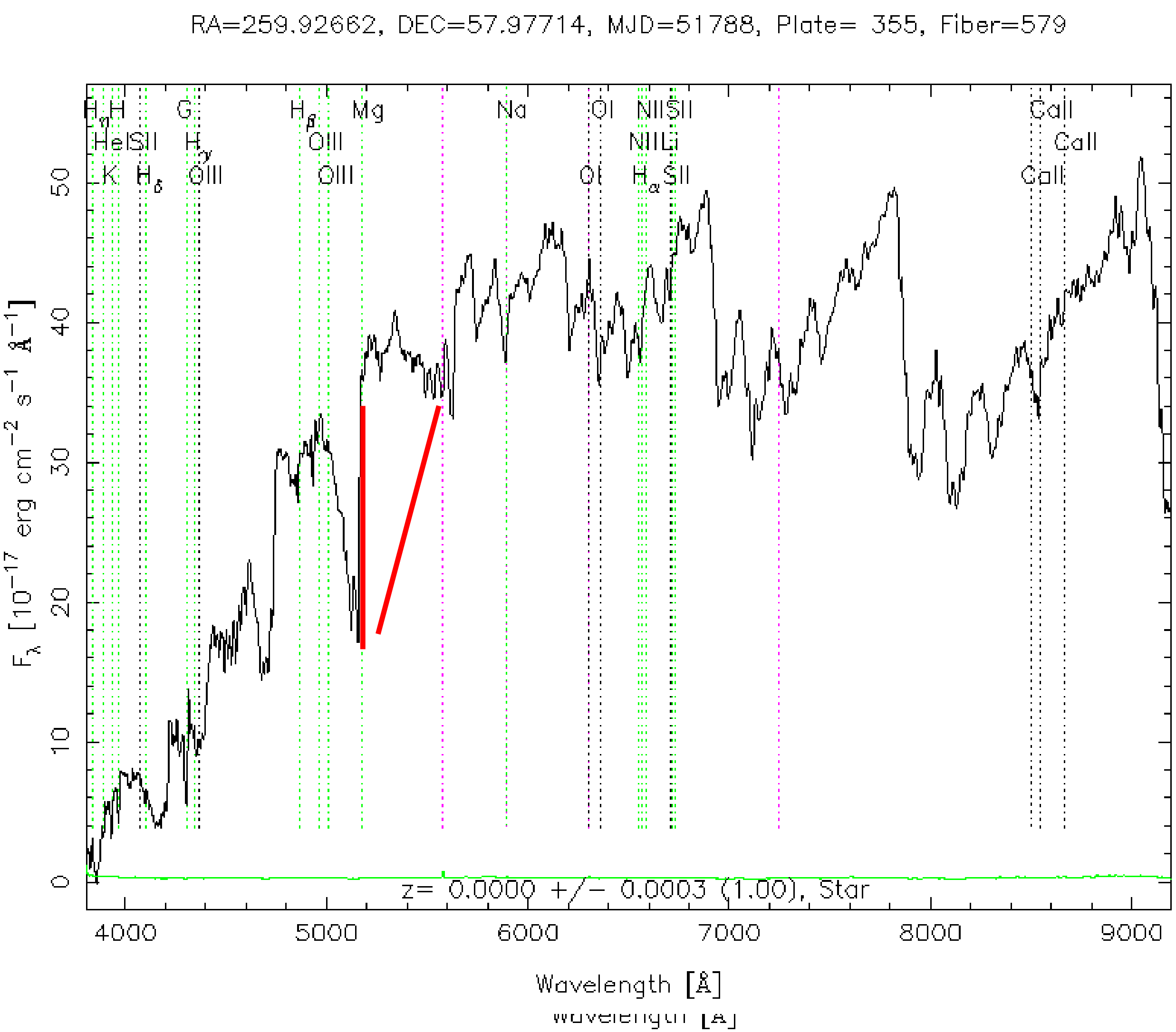


Modern stellar spectra: Brown dwarfs (L, T, Y)

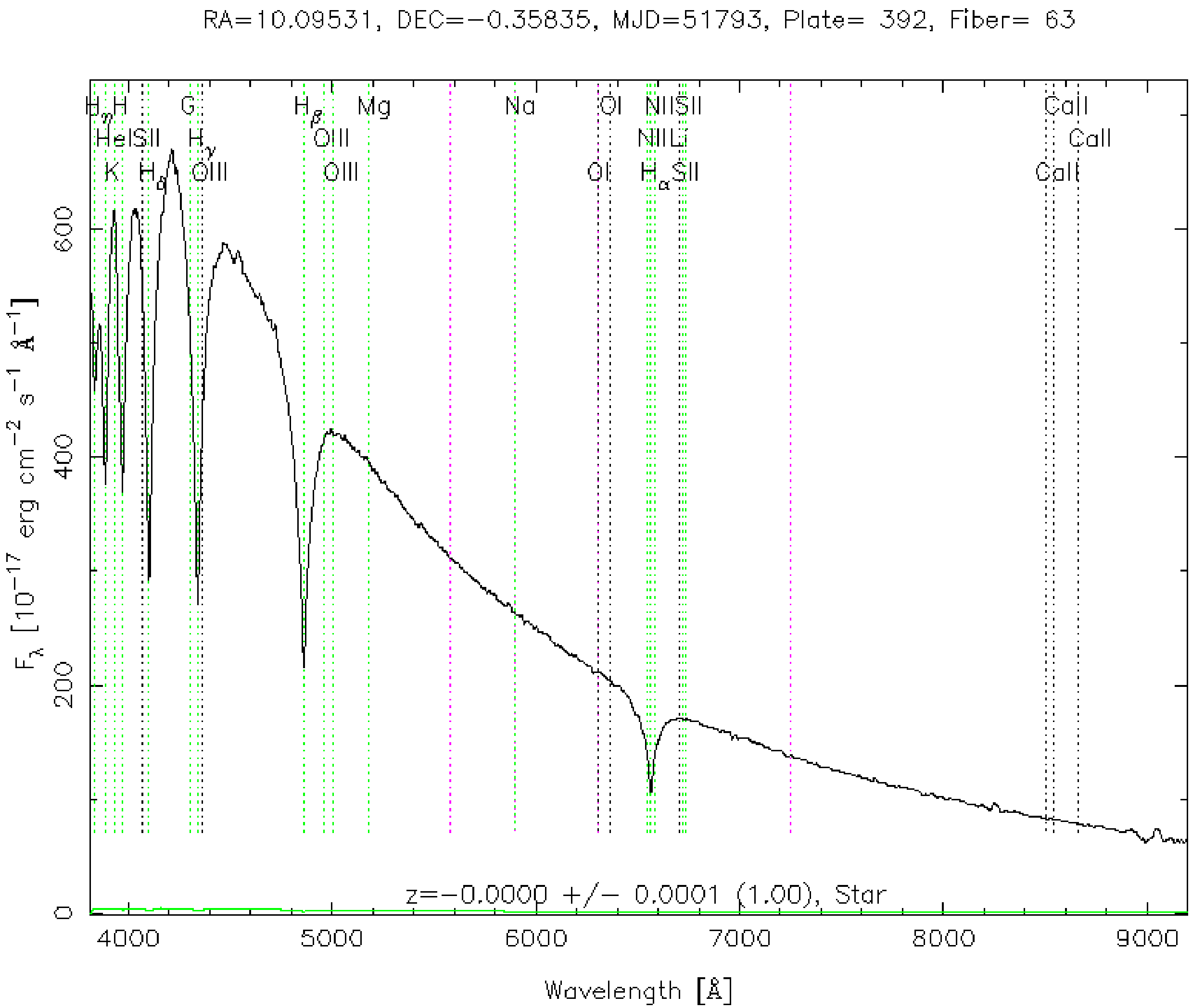
Mollecular bands



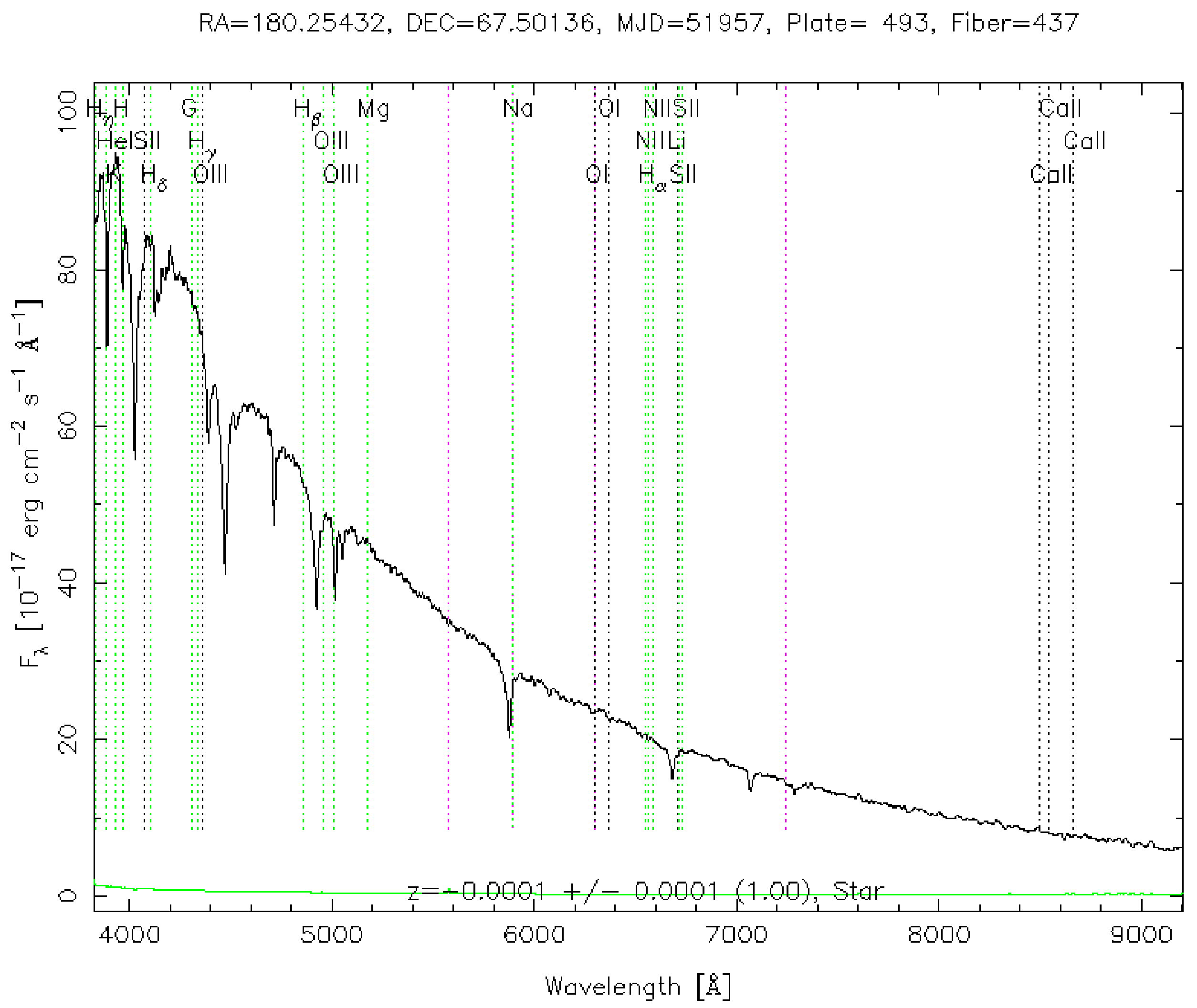
Modern stellar spectra: Carbon stars (C,S stars)



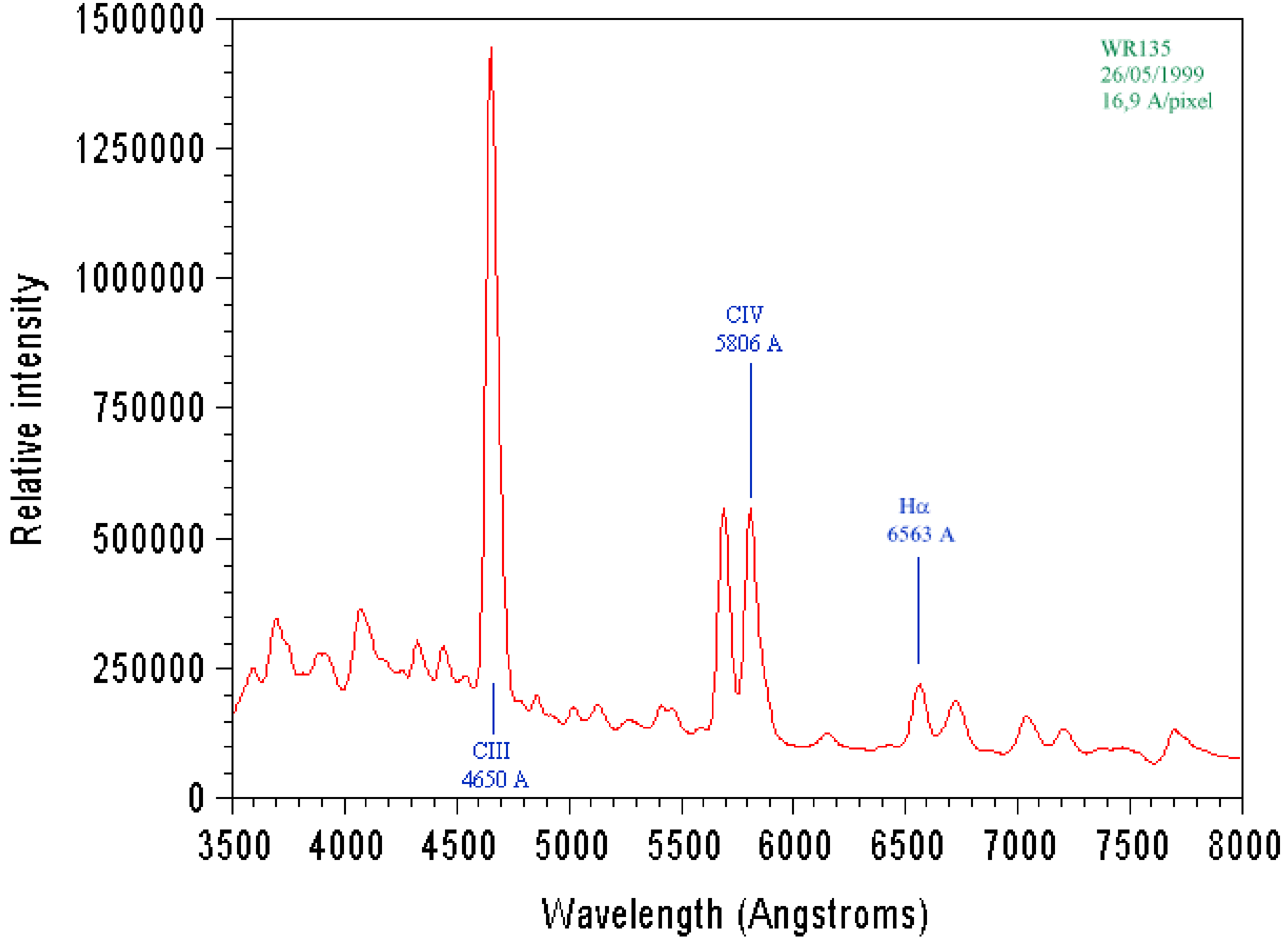
Modern stellar spectra: White dwarf stars DA



Modern stellar spectra: White dwarf stars DB



Modern stellar spectra: Wolf-Rayet stars: WN/WC/WO



4 恒星的质量

质量是恒星最重要的物理量之一，除太阳以外，只是对于某些能够确定出其轨道运动的**双星**才可能直接定出它们的质量，其原理是根据Kepler第三定律

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_{\text{Sun}} + M_{\text{planet}})} a^3$$

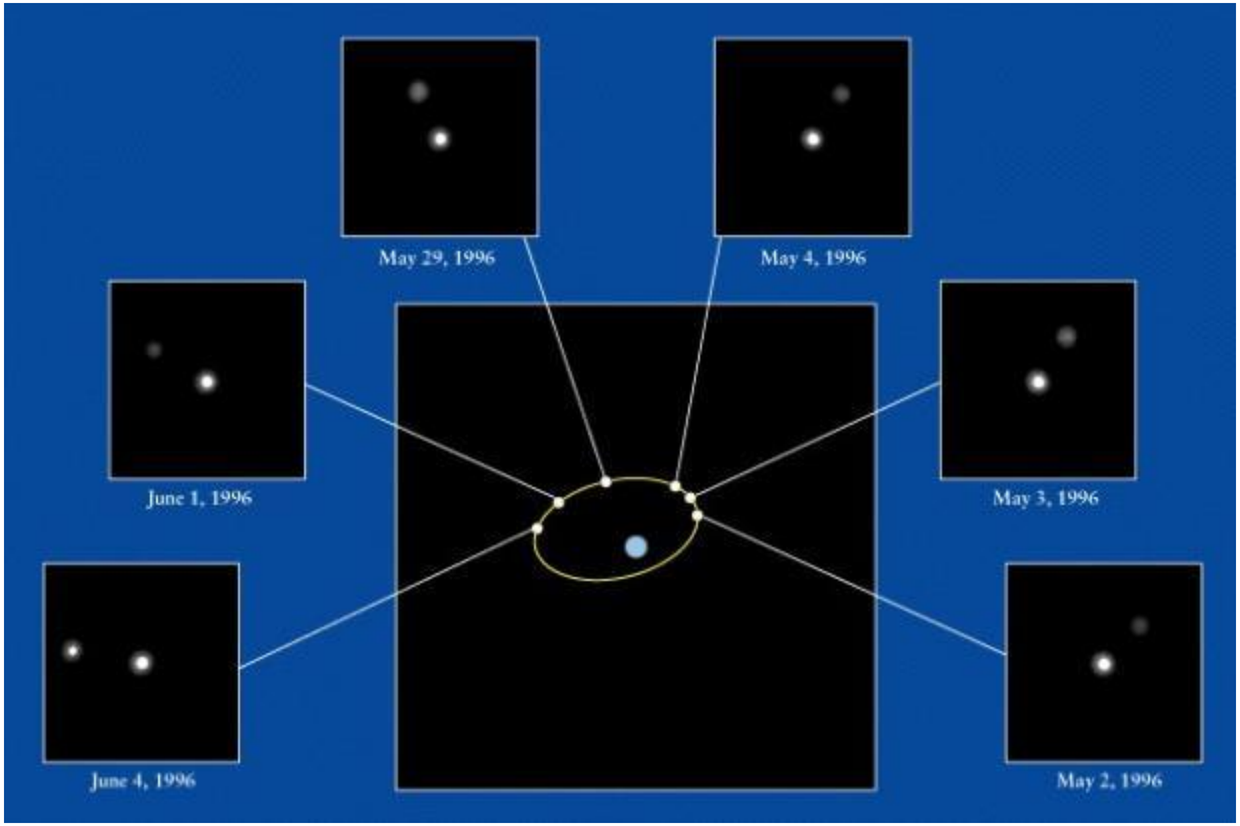
或

$$\frac{M_1 + M_2}{M_{Sun} + m_{Earth}} = \frac{a^3}{P^2}$$

其中a是双星的轨道半长轴（以天文单位，AU，为单位），P为周期（以年为单位），式中M_{Earth}为地球质量,M_{Sun}为太阳质量。

双星的类型

- 目视双星 (*visual binaries*)
  在望远镜内能够分辨出两颗子星的双星系统。

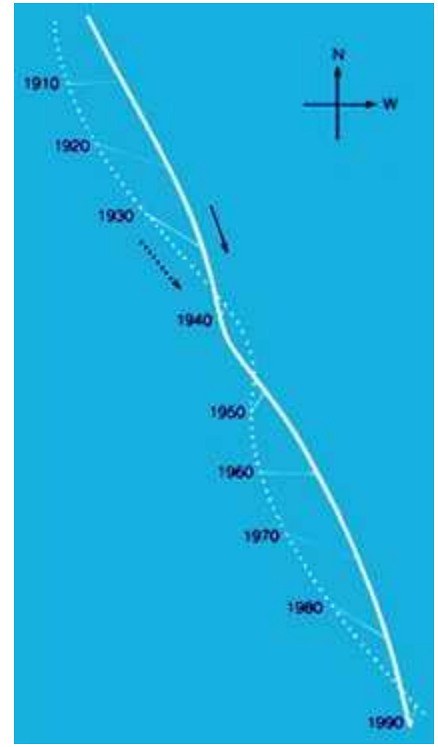


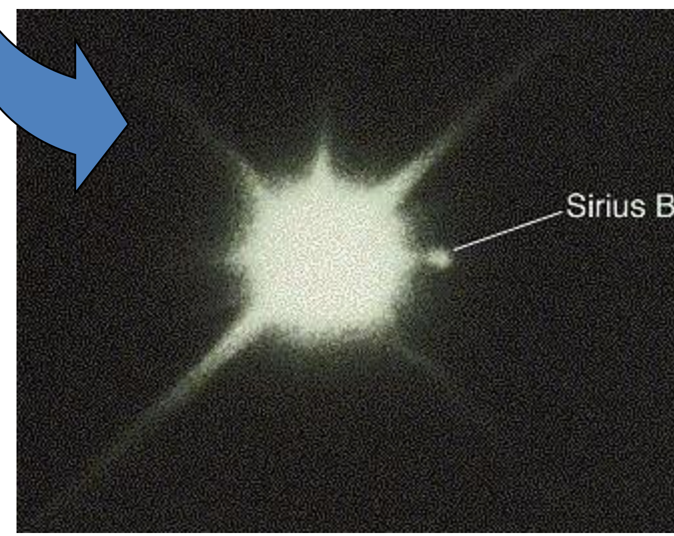
- 天体测量双星 (*astrometric binaries*)

某些双星的一颗子星较暗，很难观测到，但通过较亮子星的自行轨迹的变化推测其伴星的存在。

双星系统的质心以直线运动，但每一颗子星的运动轨迹是波浪形的，

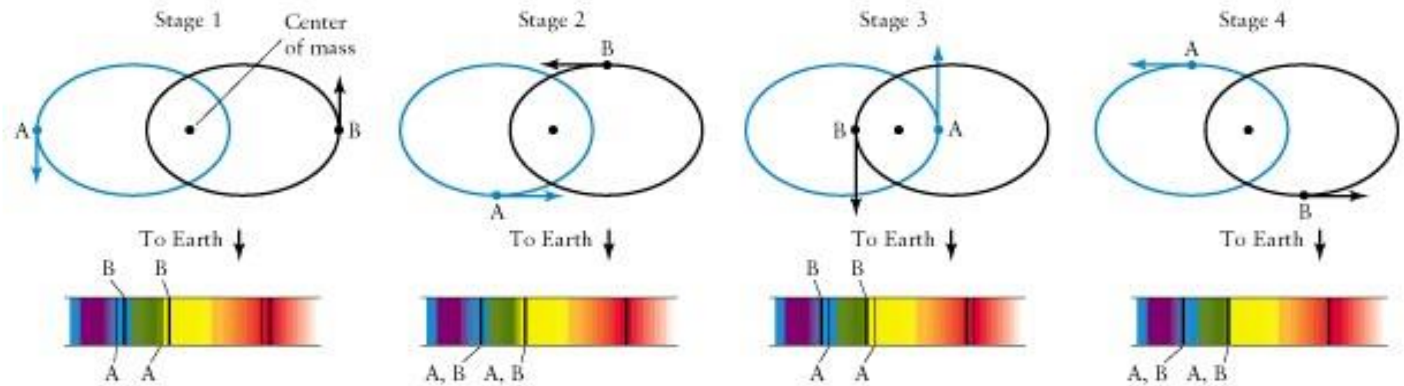
如天狼星（Sirius）。

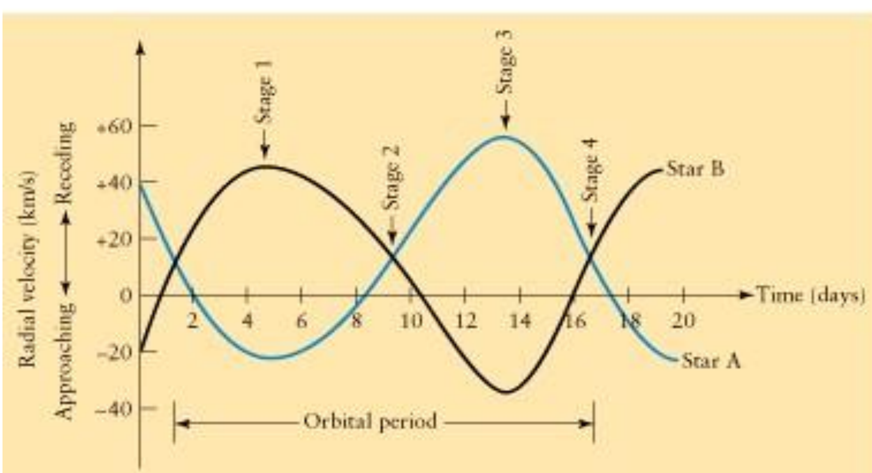




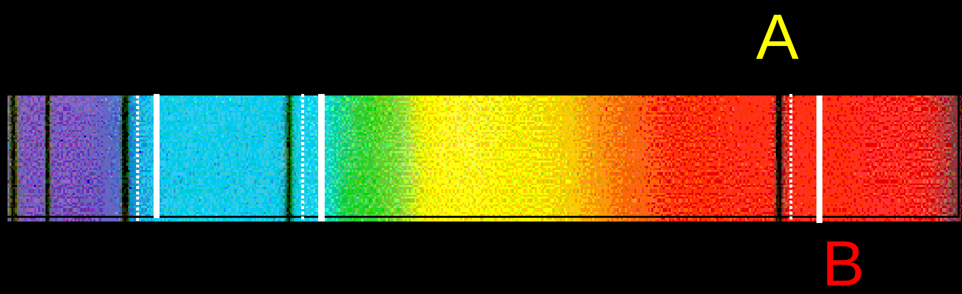
- 分光双星 (*spectroscopic binaries*)

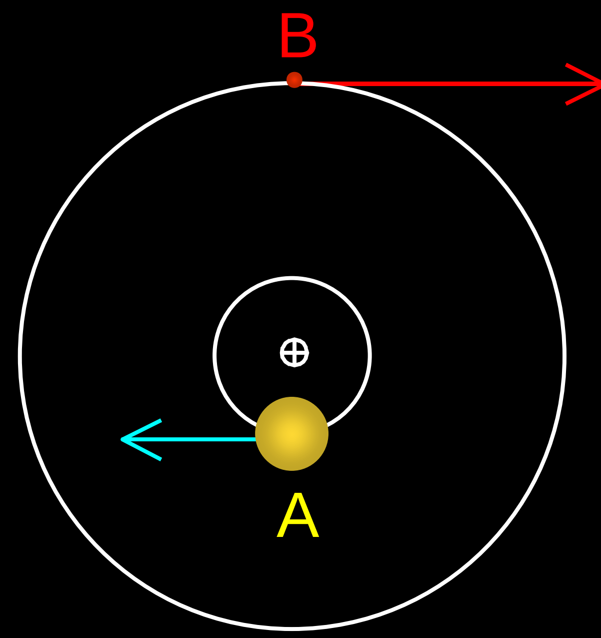
  通过子星轨道运动引起的谱线的Doppler位移确定其双星性质。可以分为双线、单线分光双星。谱线位移取决于双星轨道倾角的大小。

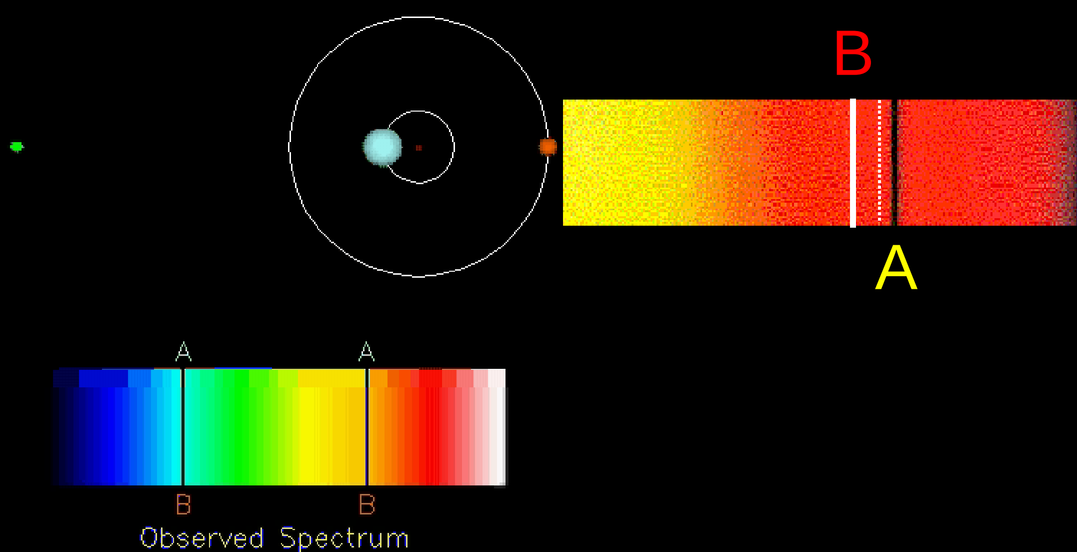


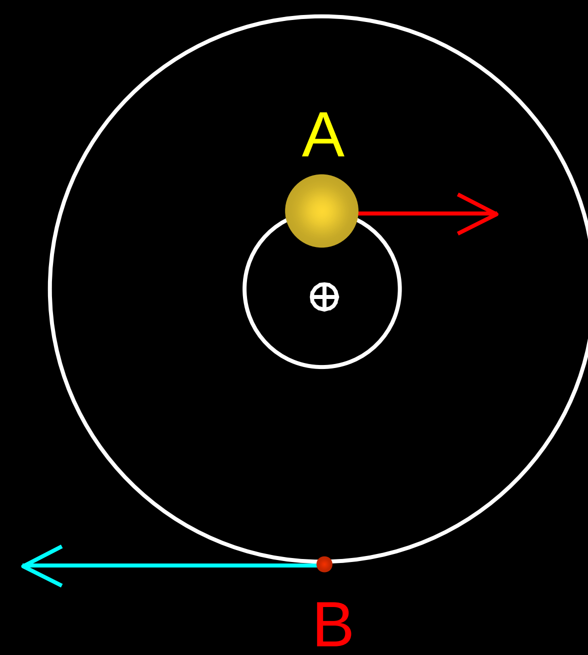


Spectroscopic Binary









视向速度曲线

由子星谱线的Doppler位移得到的子星的视向速度随时间的变化曲线。

如子星1的轨道运动速度为$V_{1,0}$，双星轨道平面的法线与视线的夹角为i, 它的视向速度为

$$V_1 = V_{1,0}\sin i = \frac{2\pi a_1}{P}\sin i$$

$$a_1 = \frac{a m_2}{m_1 + m_2}$$

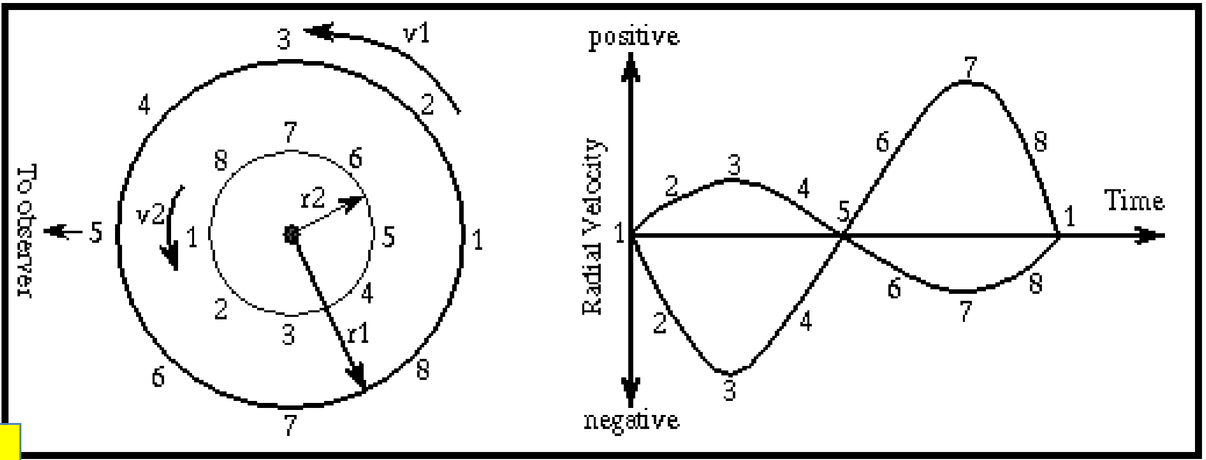
由于

得到

$$V_1 = \frac{2\pi a}{P}\frac{m_2 \sin i}{m_1 + m_2}$$

且 $m_1 V_1 = m_2 V_2$

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G\,(m_1 + m_2)}$$



质量函数 (mass function)

利用Kepler第三定律消去上式中的*a*得到双星的质量函数为

$$f(m_1, m_2, i) = \frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{V_1^3 P}{2\pi G}$$

由于轨道倾角未知，由恒星的质量函数不能确定恒星的质量，但可用于恒星质量的统计分析。

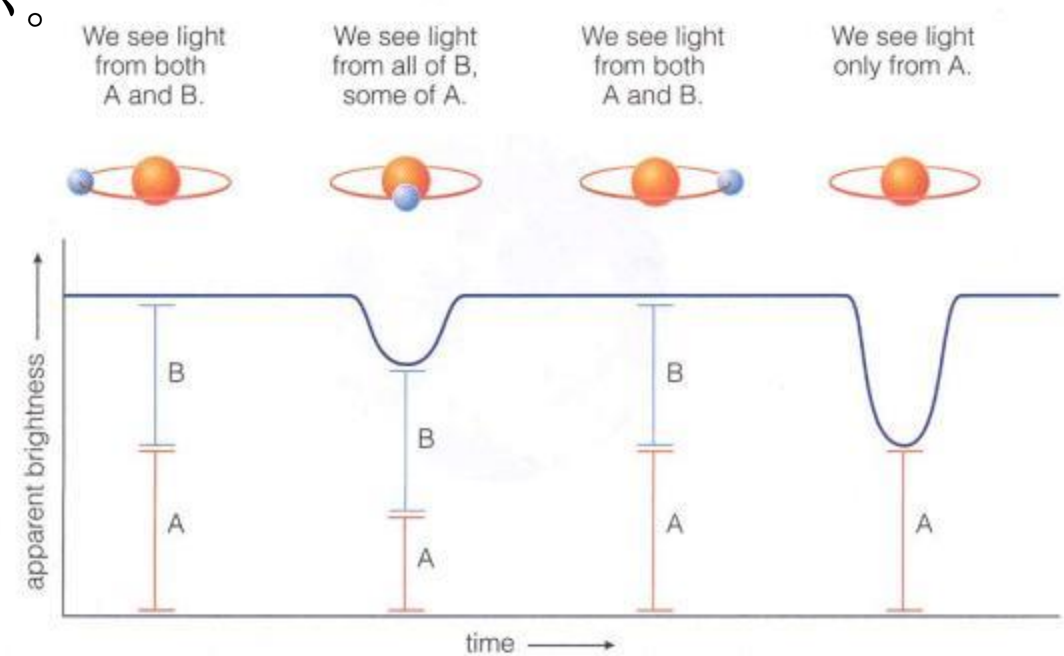
- 食双星 (eclipsing binaries)

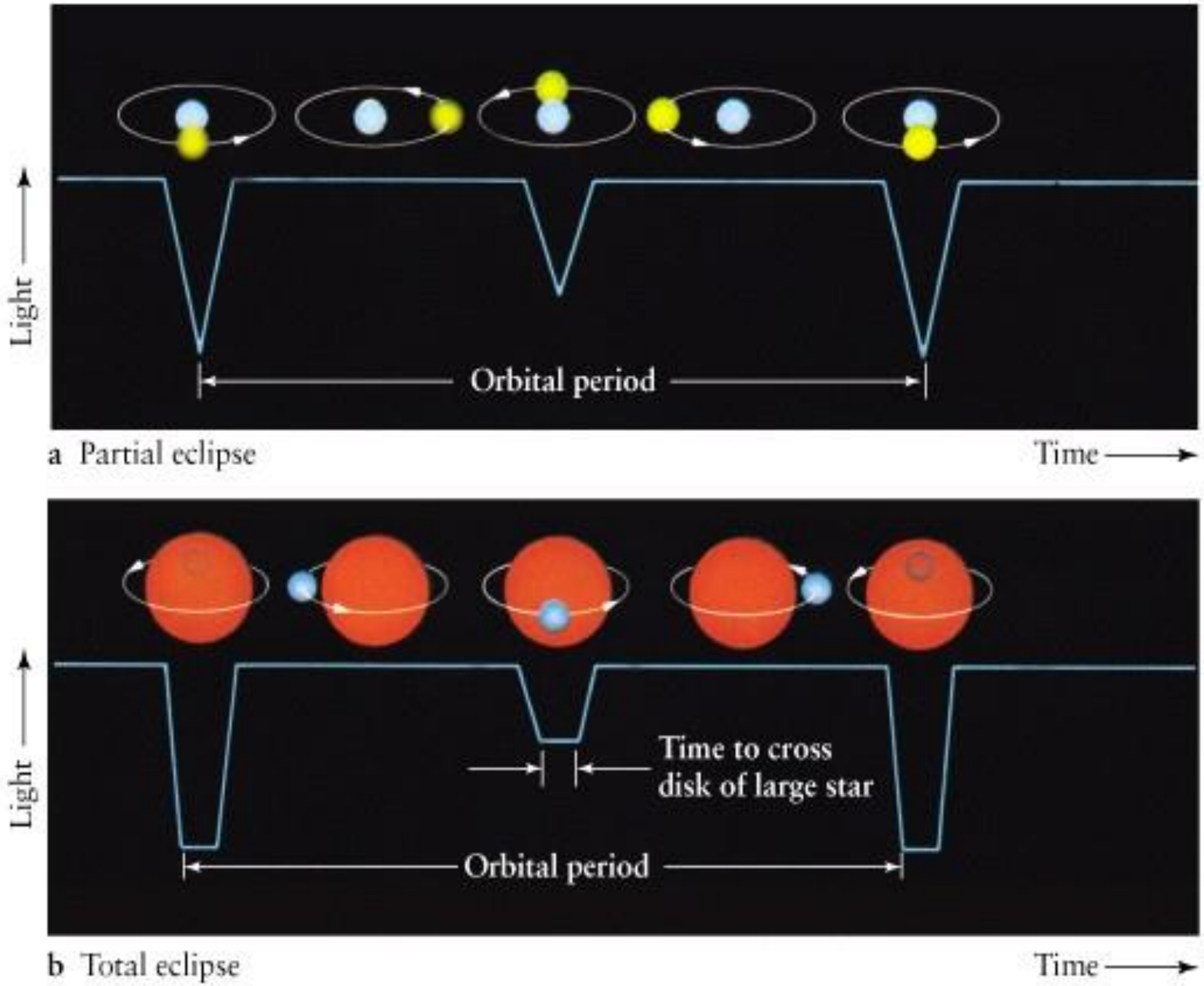
  子星相互交食造成亮度变化的双星。

  光变曲线 (light curve)：子星间的相互交食造成双星亮度的变化曲线。

  由光变曲线可以得到：

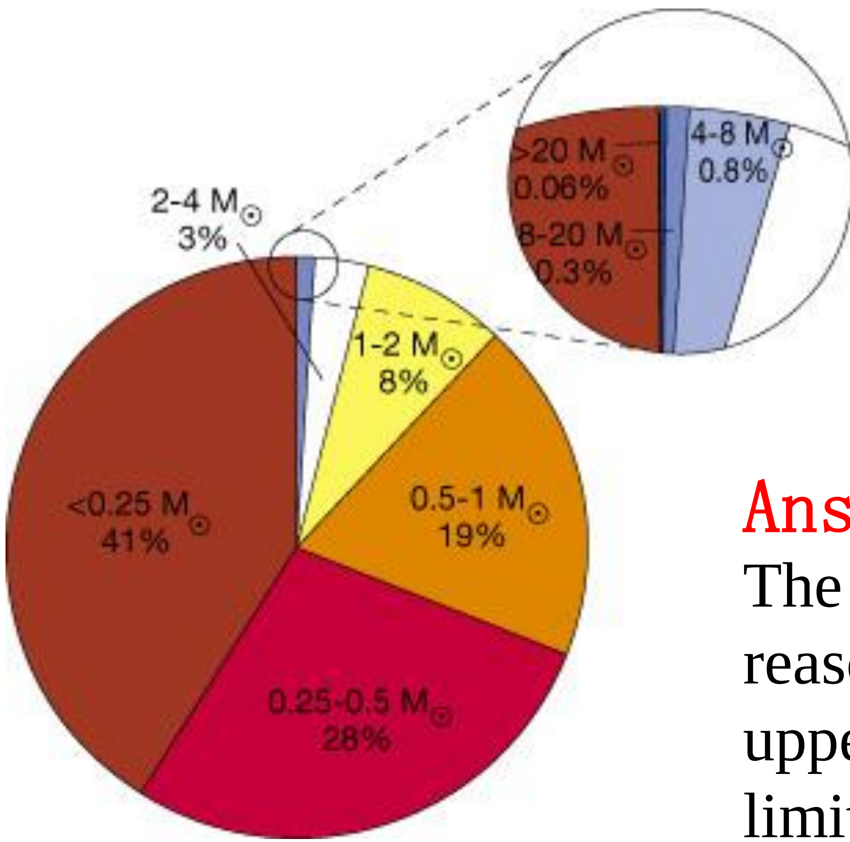
  两颗子星的温度比、轨道倾角（→恒星质量）和恒星的大小。





如果分光双星同时又是交食双星，则从光变曲线可以定出交角i→定m_1、m_2

恒星质量变化范围不太大，绝大多数恒星的质量在0.1 $M_\odot$到120 $M_\odot$之间。质量太大（$> 60\ M_\odot$）的恒星动力学不稳定，质量太小（$< 0.08\ M_\odot$）的恒星无法点燃氢燃烧。



Answer:
The underlying reasons for the upper (lower) mass limit of stars.

质光关系(*Mass-Luminosity Relation*)，

观测发现,恒星的光度同质量的某次方成正比

$$\boxed{L = const \times M^{\nu}}$$

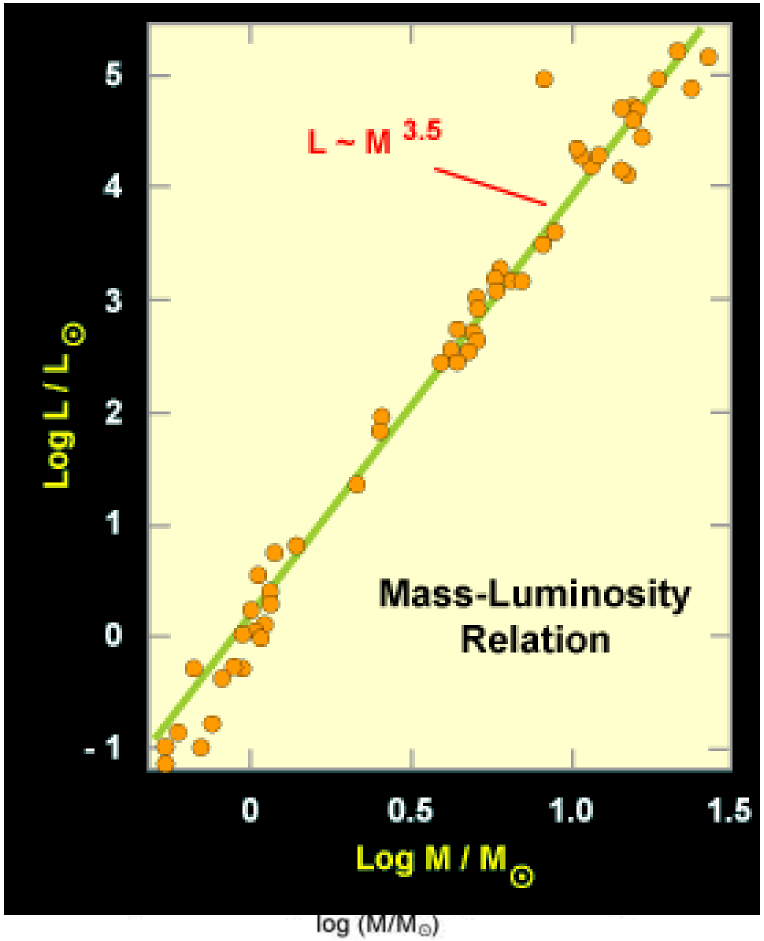
对主序星， ν 在3.5到4.0之间。

$$L/L_{\odot} = (M/M_{\odot})^{4.0\pm0.02} \quad \text{for } 0.4 < M < 10\ M_{\odot}$$

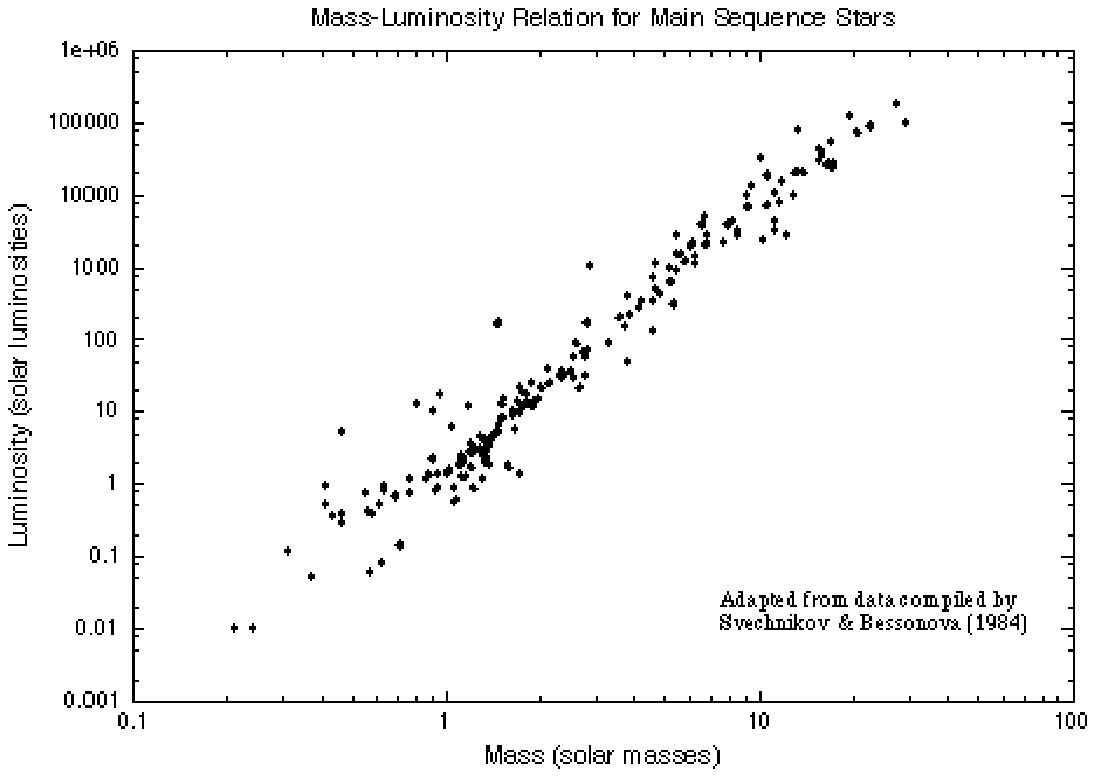
$$L/L_{\odot} = (M/M_{\odot})^{3.6\pm0.1} \quad \text{for } 5 \le M \le 40\ M_{\odot}$$

应用：

估算恒星的寿命。



恒星结构理论必须能够再现这种观测给出的经验关系.



The mass-luminosity relation for 192 stars in double-lined spectroscopic binary systems.

5 恒星的半径

对那些离我们比较近的恒星，可以通过直接测量的方法来确定恒星的半径：如用干涉法(Interferometric measurements)和月掩星法(Lunar occultations)（或者大、小行星掩星法）来首先测定出它们的角径，再测定其距离后可定出半径 。

对于交食双星(Eclipsing binaries)，可以利用光变曲线的形状和交食的持续时间来测定。

对于离我们非常遥远的恒星我们得用一些辐射定律来测定恒星的半径（也是通常所采用的方法）。

L (luminosity) = 总的辐射功率

I (Intensity) = 单位面积上的辐射功率

–Stephan-Boltzmann Law: $I = \sigma T^4$

–Surface area of a sphere: $A = 4\pi R^2$

即$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ $\Rightarrow$ $\boxed{L/L_\odot = (R/R_\odot)^2\,(T/T_\odot)^4}$

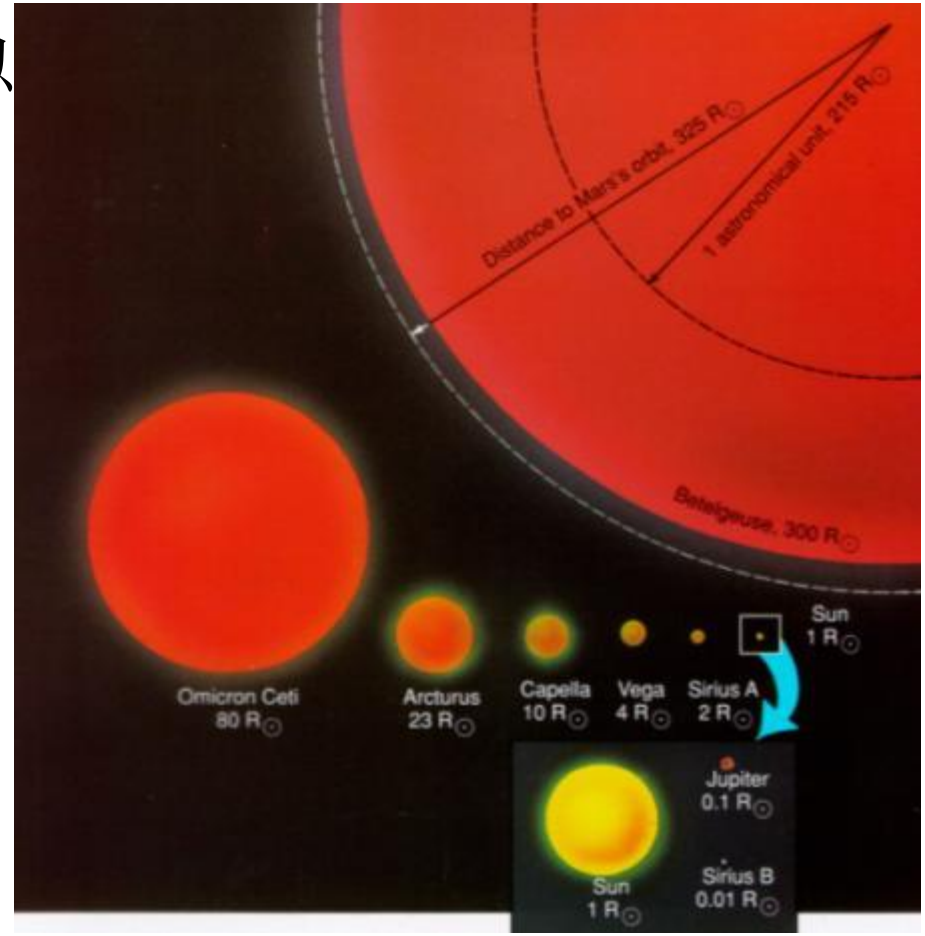
Therefore we can measure a stars size if we know its luminosity and its temperature

根据恒星体积的大小可以把它们 分成以下几类：

超巨星　R ~100-1000 $R_{\odot}$

巨　星　R ~10-100 $R_{\odot}$

矮　星　R ~ $R_{\odot}$



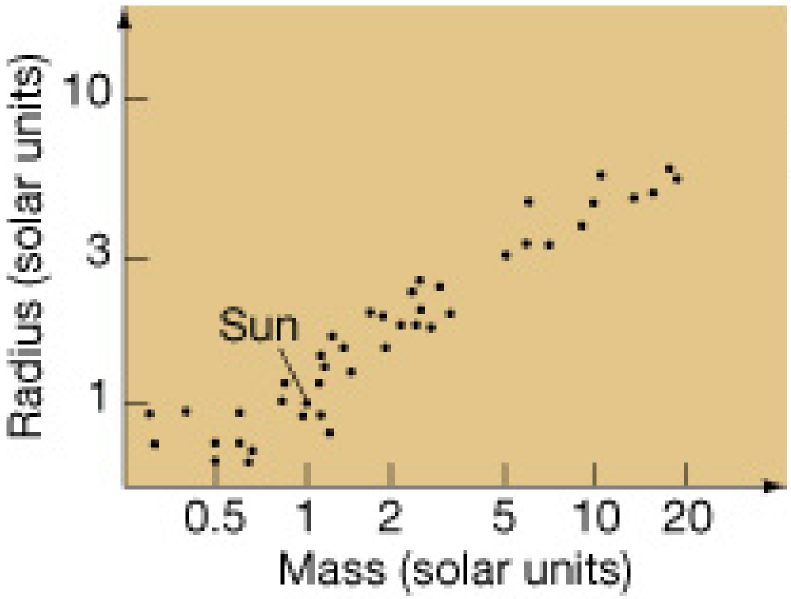
10^{-5} $R_{\odot}$ (中子星)

10^{3} $R_{\odot}$ (超巨星)

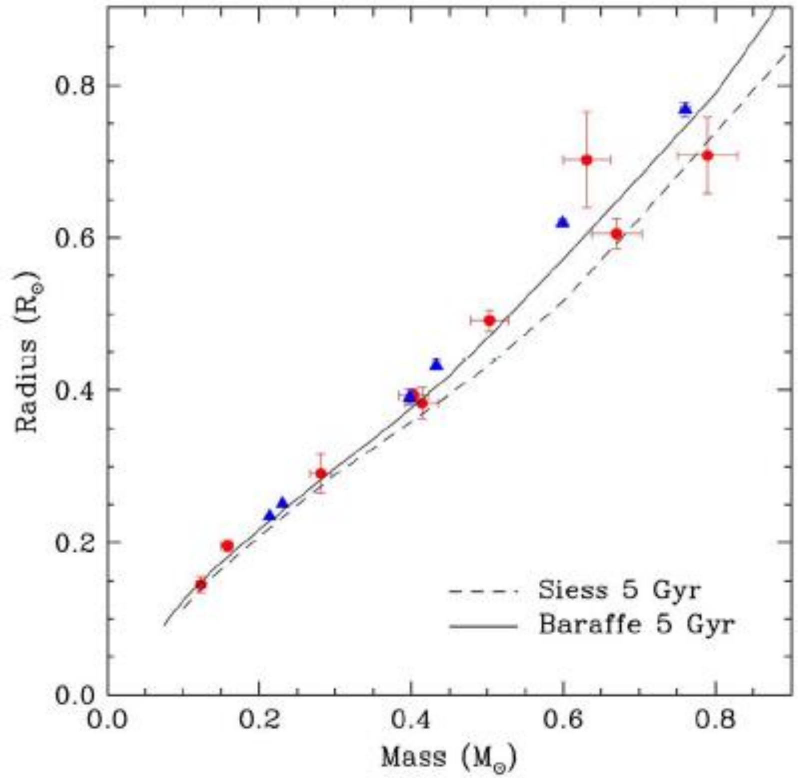
唯一准确知道的恒星半径是太阳半径，为（6.9598±0.0007）×10^{10}cm

主序星的质量-半径关系：

$R \sim M^{0.5\text{-}1}$



the Lower Main Sequence



Radius determinations from angular diameter measurements and eclipsing binaries

§ 1.2 赫罗图

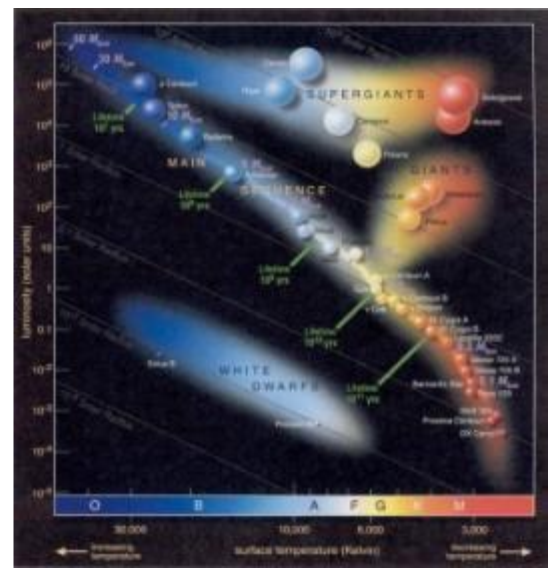
为什么想到要做赫罗图？

1. 由观测能够确定出的恒星的两个最基本的内禀性质为恒星的光度 L 和恒星的有效温度。

2. 由黑体谱所满足的Stefan-Boltzmann 定律有

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^{\ 4}$$

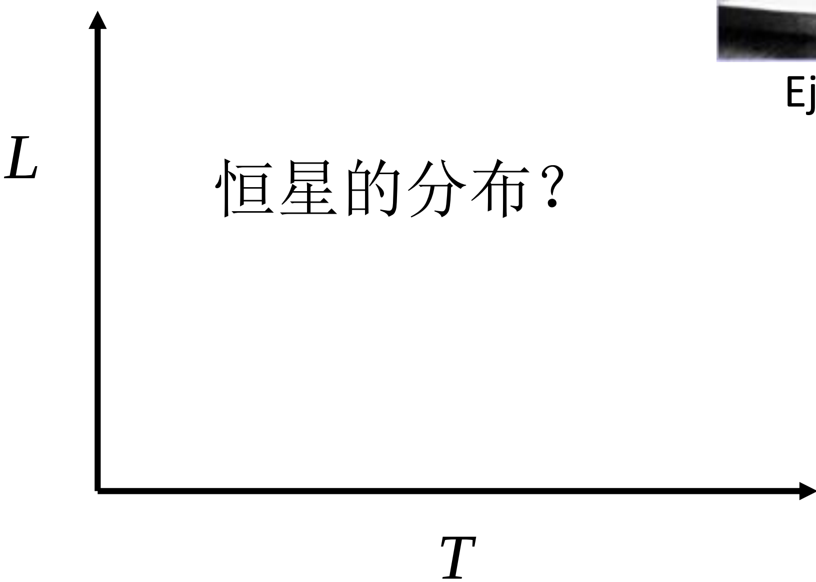
因为恒星的寿命远远大于人类一生的寿命，人们也不得不从大量的恒星样品中进行统计分析，给出恒星演化的某些重要信息。



由丹麦天文学家E. Hertzsprung和美国天文学家H. R. Russell创制的恒星的光度 - 温度分布图。

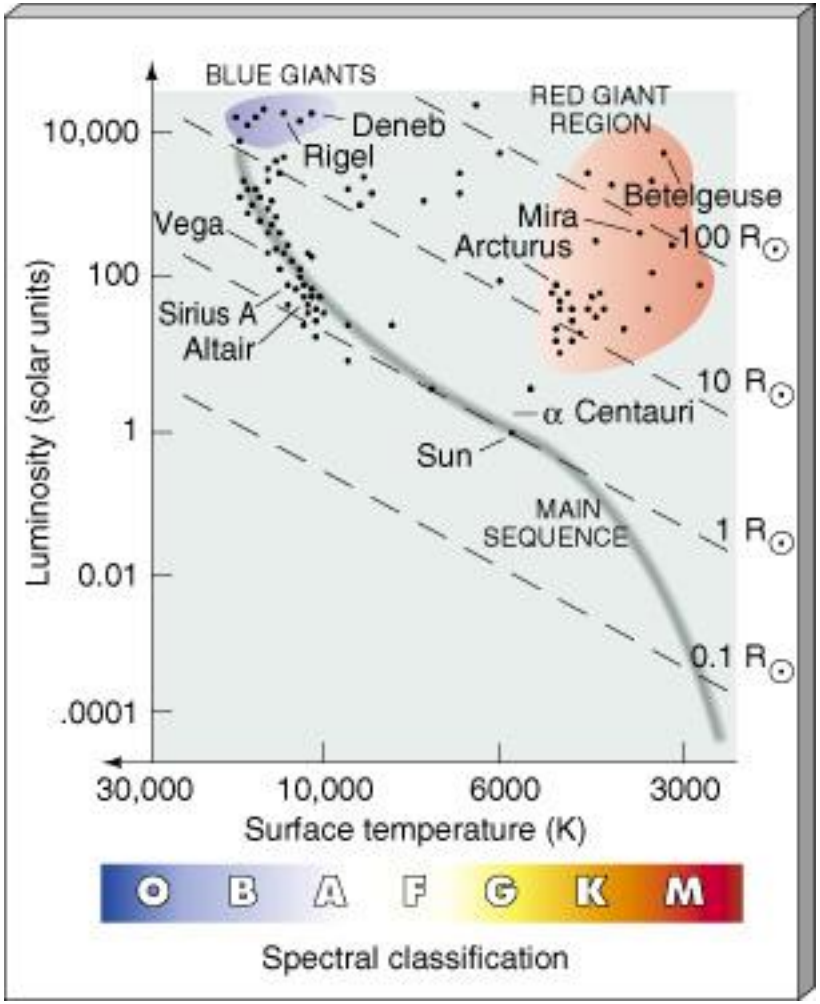
Ejnar Hertzsprung (1873-1967)

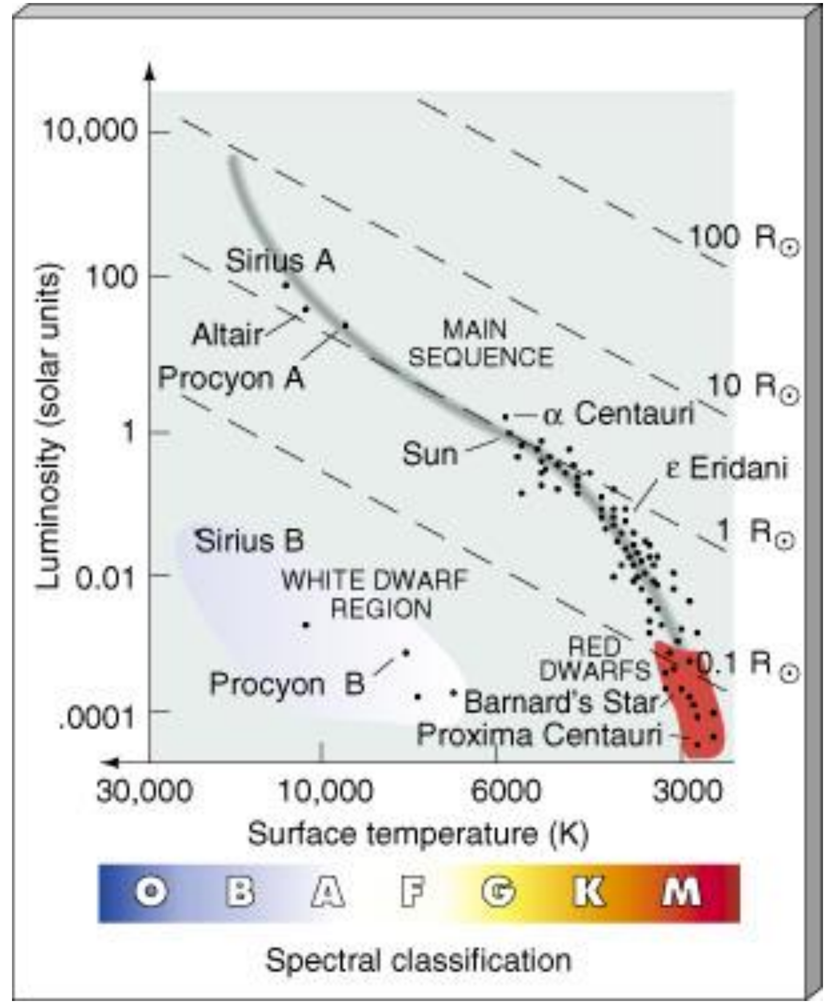
Henry Norris Russell (1877-1957)



赫罗图的横坐标也可用恒星的光谱型、色指数，纵坐标也可用恒星的绝对星等表示。

color–magnitude diagrams

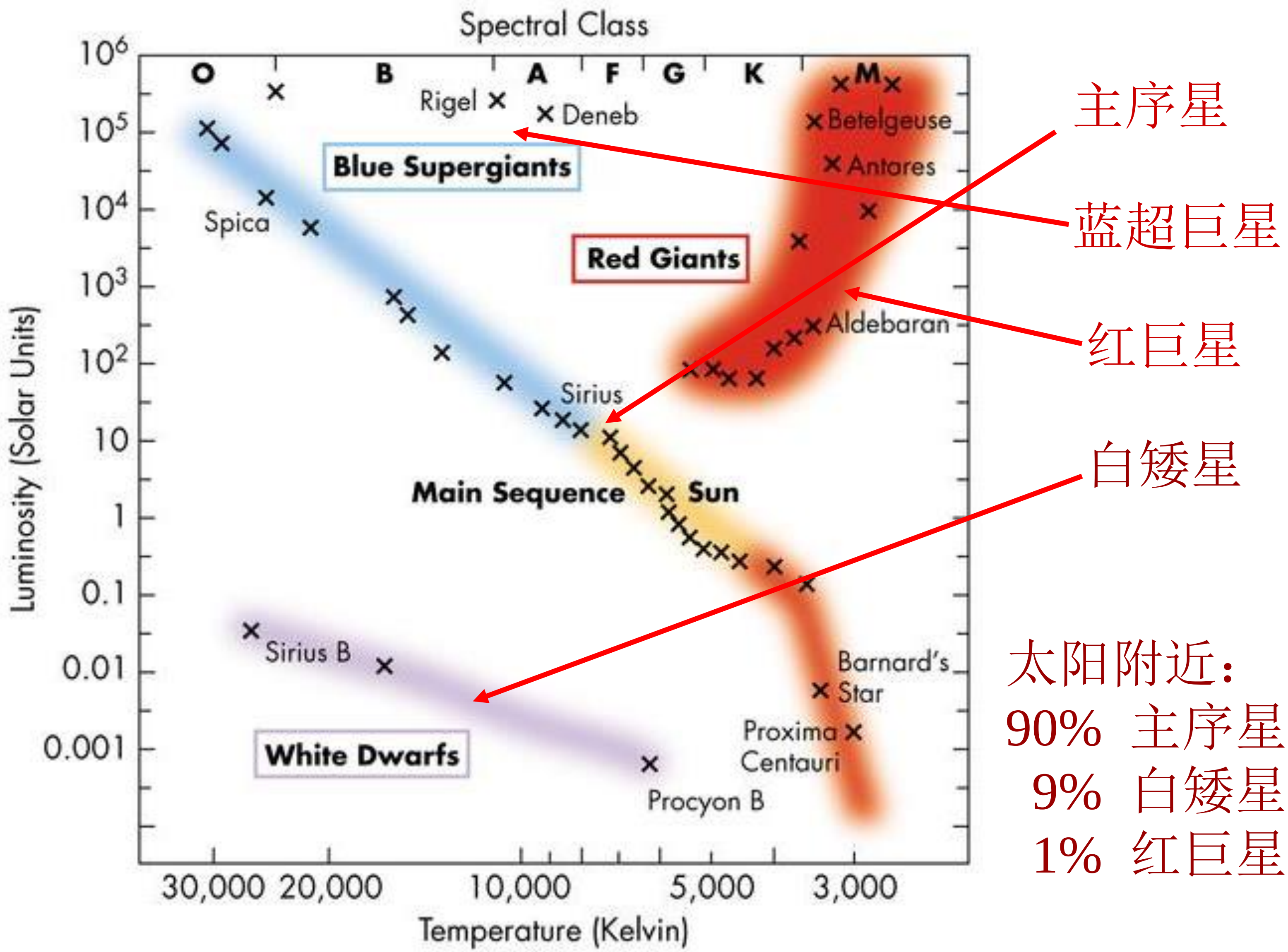




天空100颗最亮的恒星在赫罗图上的分布。

太阳附近5 pc范围内的恒星在赫罗图上的分布。

恒星在赫罗图上的分布特征



太阳附近：

90% 主序星

9% 白矮星

1% 红巨星

赫罗图上的等半径线 （ $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ ）

$$M - M_{\odot} = -2.5 \log (L/L_{\odot}) = -5 \log (R/R_{\odot}) - 10 \log (T/T_{\odot})$$

即 $\log (R/R_{\odot}) = 8.47 - 0.2\, M - 2 \log T$

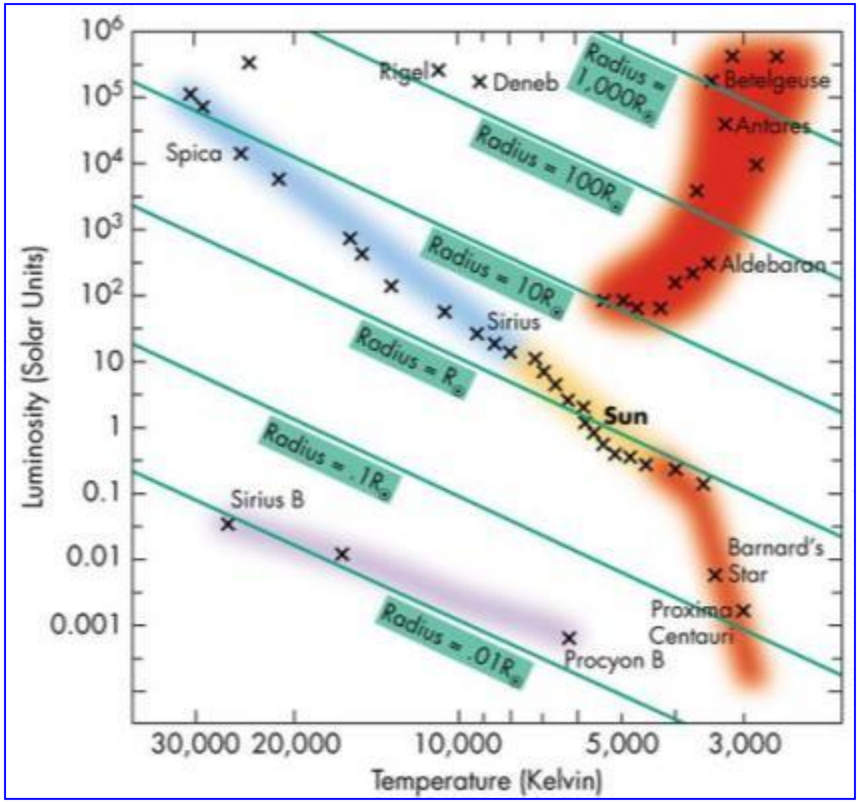
超巨星

巨星

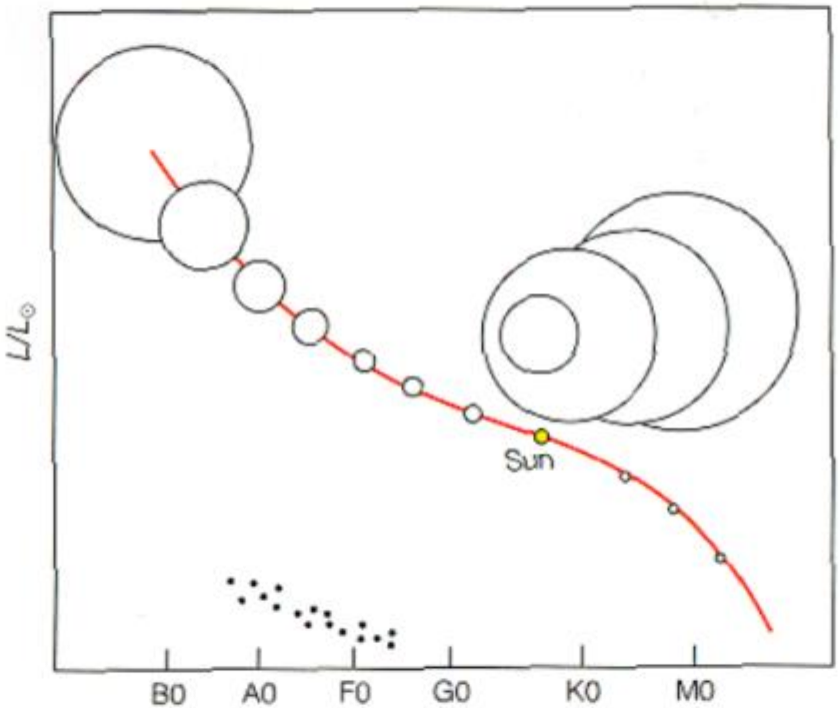
主序星

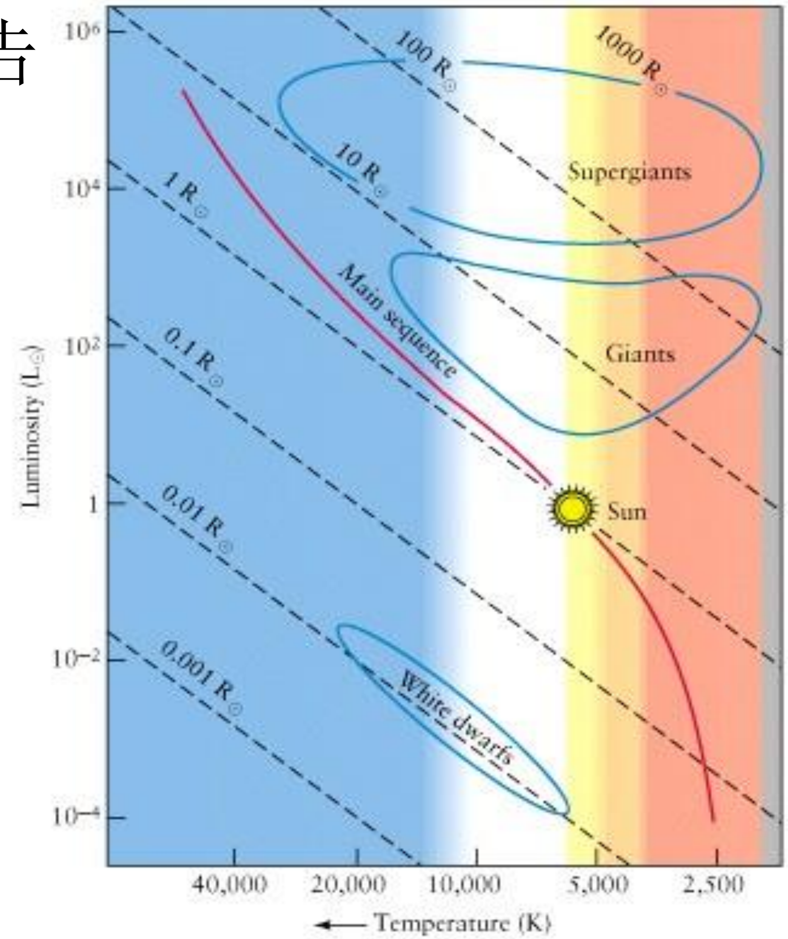
白矮星

半径R



赫罗图中所处位置可近似告知恒星的大小。





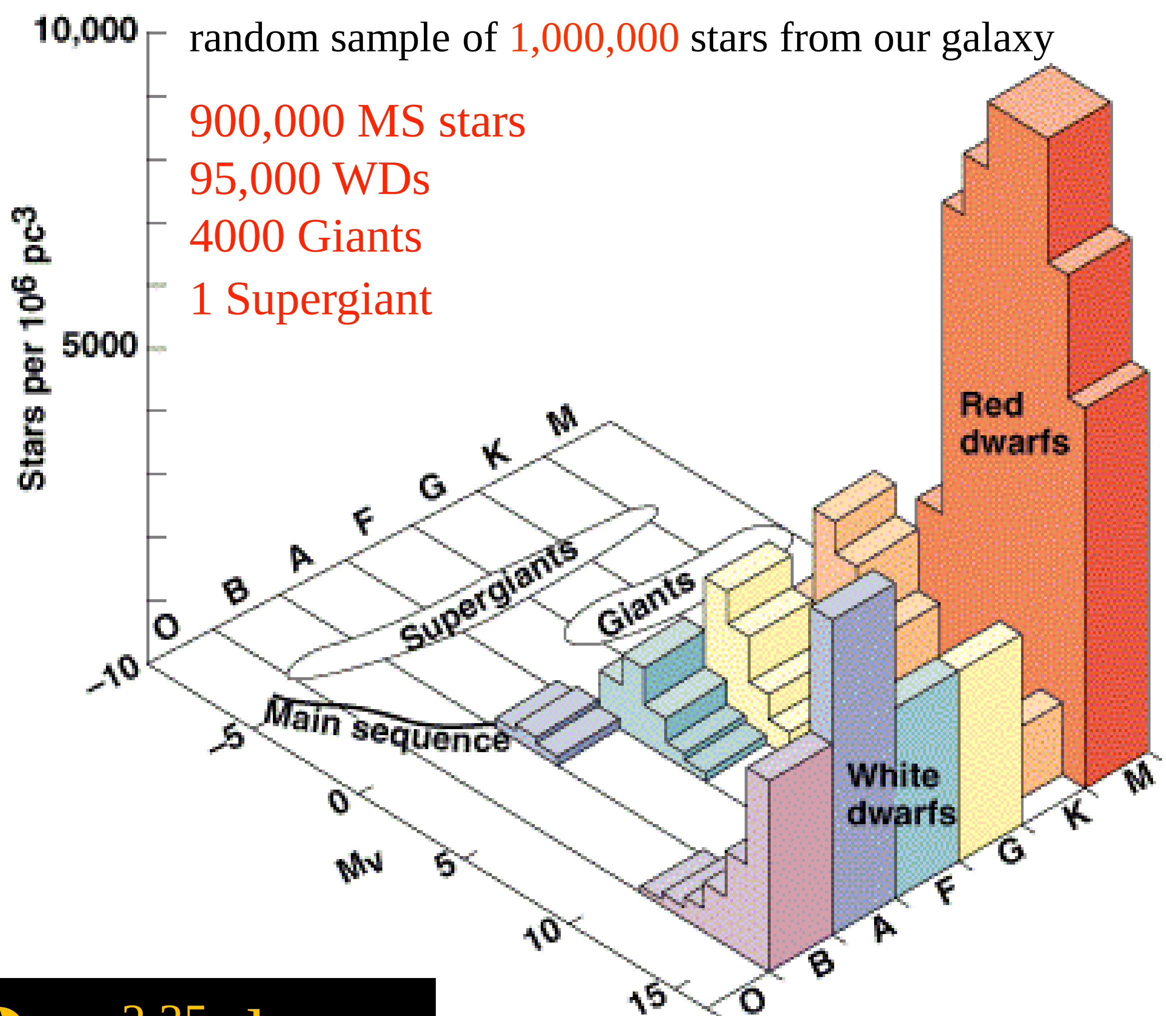
矮星（*dwarfs*），巨星（*giants*），超巨星（*supergiants*）分别对应着不同大小的恒星。 观测到的90%以上的恒星是位于主序带上的矮星。

Why ?

恒星的普查（*Stellar Census*）

There are many more small, faint red dwarf stars on the main sequence than large, luminous blue stars.

There are many more main sequence stars than giant or supergiant stars.



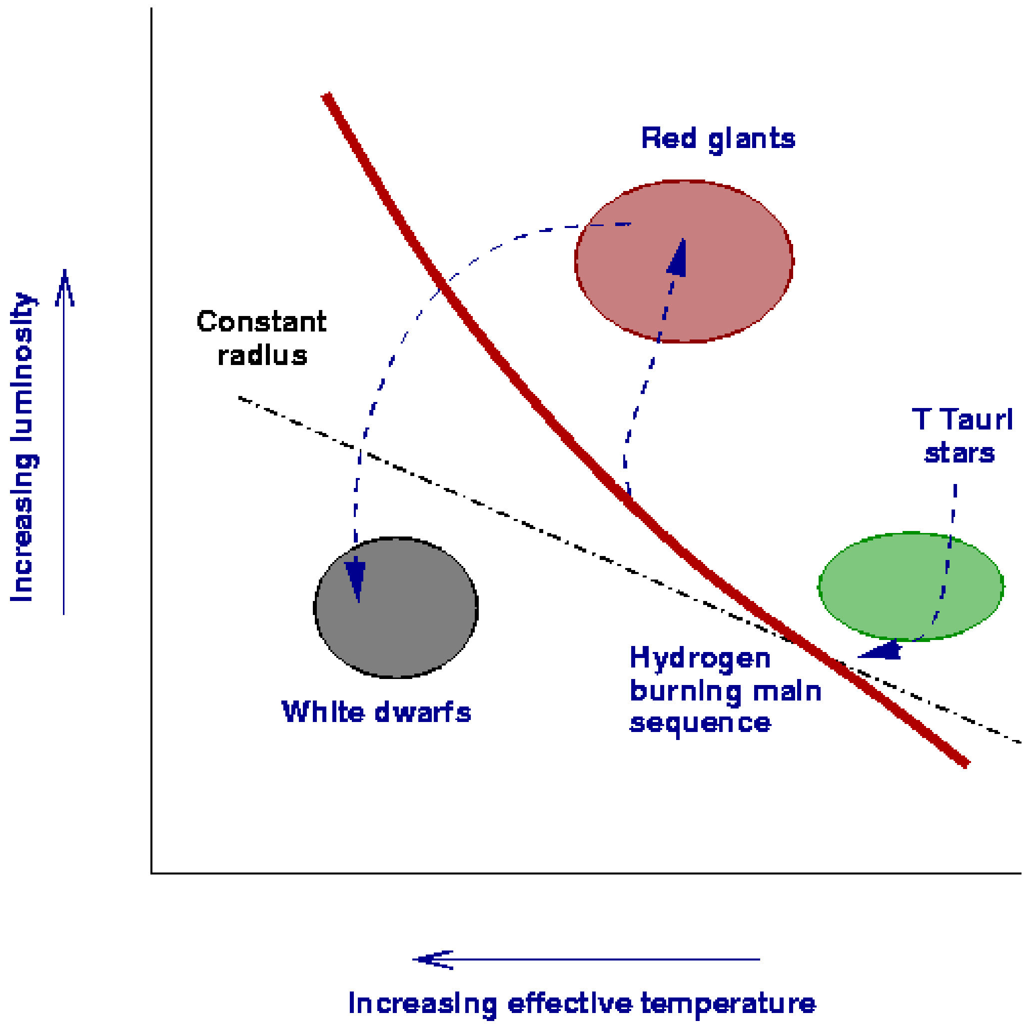
- IMF: $f(m)$ dm ✪ $m^{-2.35}$ dm

对赫罗图的解释

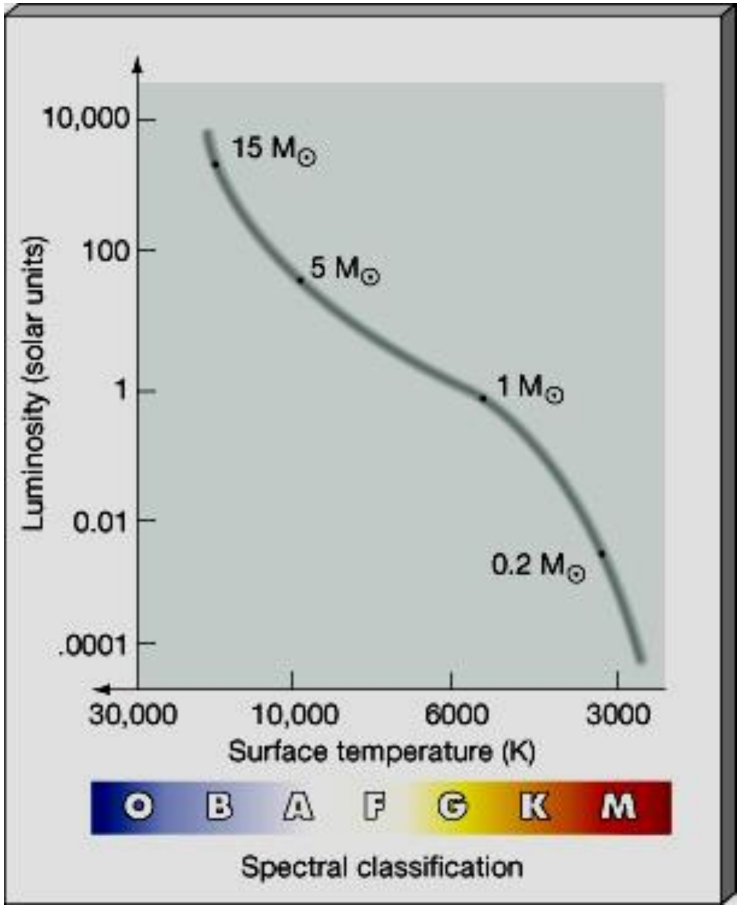
1. H-R 图中不同位置的点对应着不同年龄的恒星。According to this hypothesis the evolution of a star can be traced in the H-R diagram by some line, with the time elapsed from the formation of the star being the changing parameter along it.

2. 恒星的性质，尤其是恒星的光度和表面温度，非常强地依赖于恒星的质量， H-R 图中不同位置的点对应着不同质量的恒星。

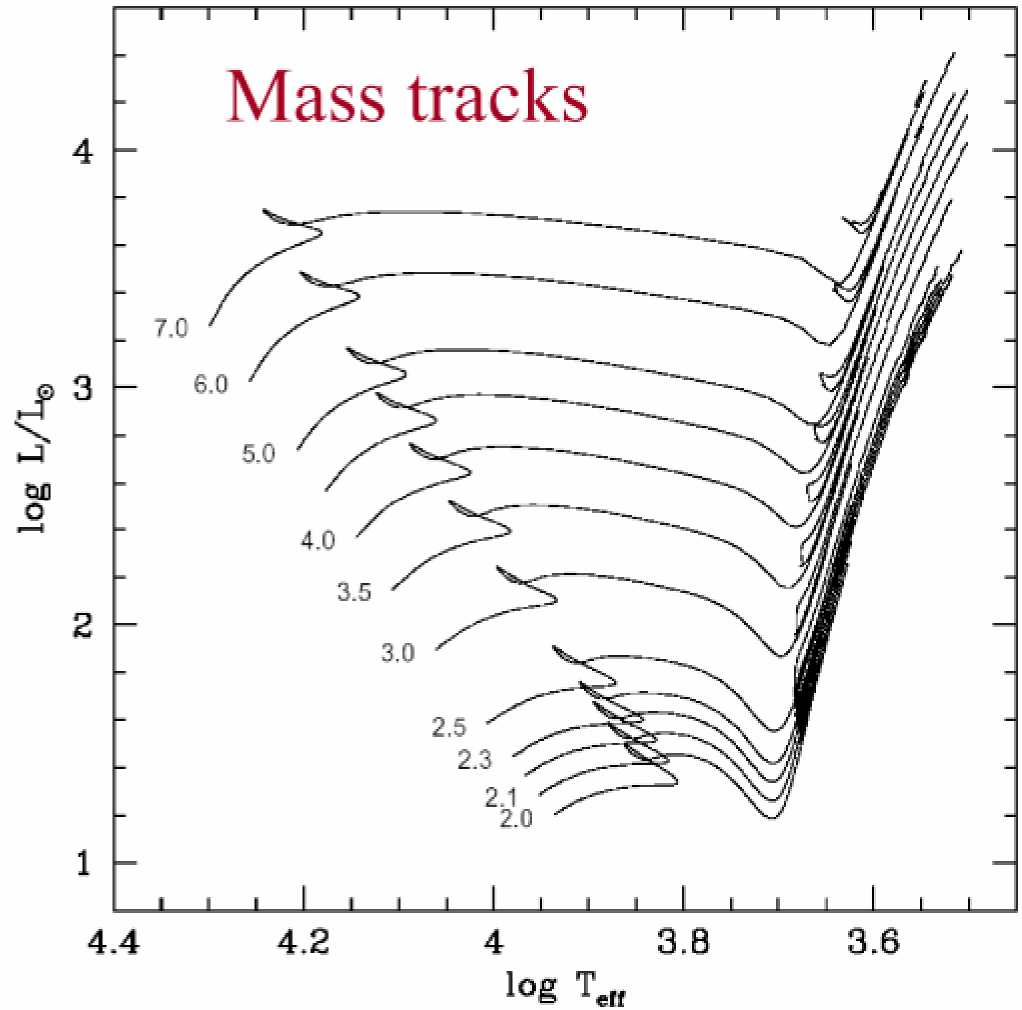
Theorist's HR diagram



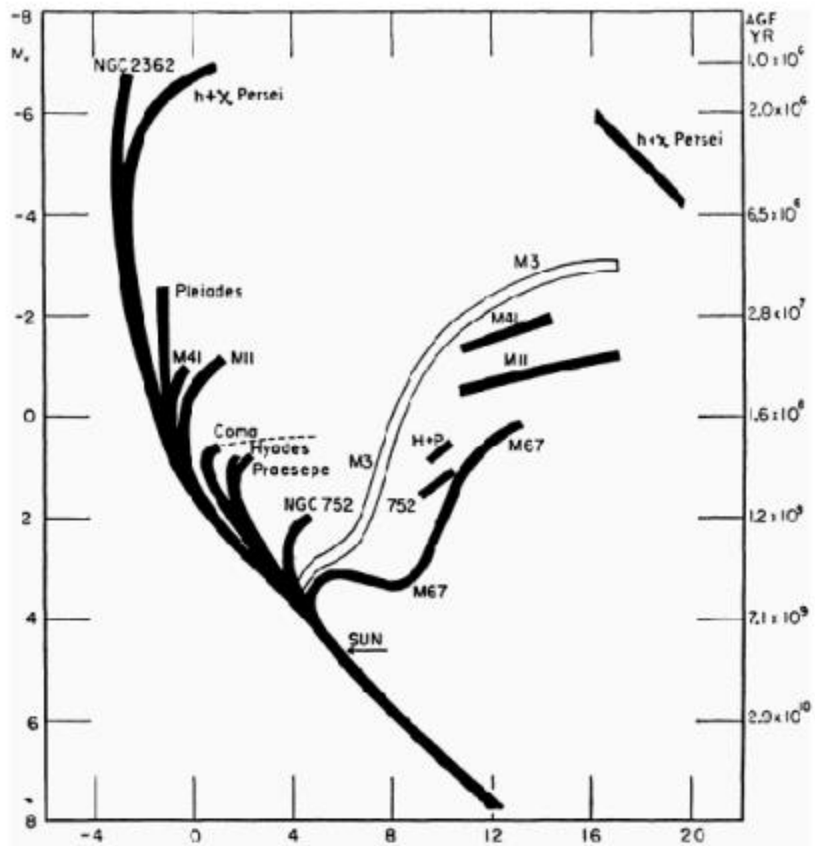
- 恒星的质量决定了恒星在H-R图上的位置。
- 高质量的恒星明亮且高温，位于主序带的上部。
- 低质量的恒星黯淡且低温，位于主序带的下部。



不同质量的恒星在H-R图上的分布



质量越大的恒星寿命越短，越早脱离主序。

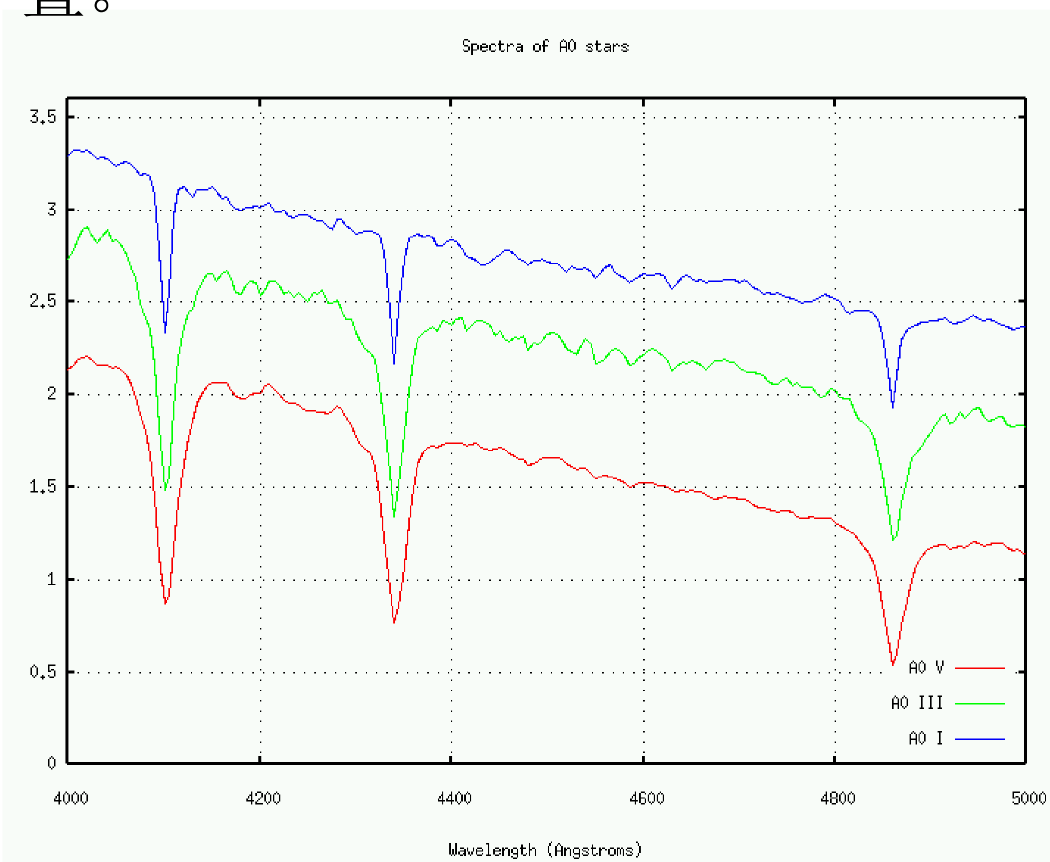


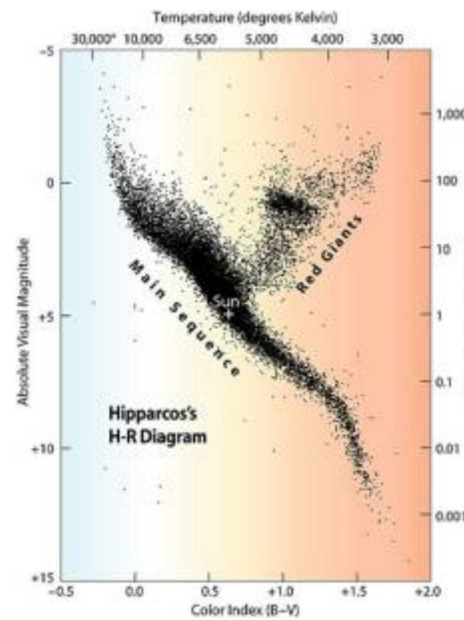
赫罗图脱离主序的位置对应星团的年龄。

Yerkes光谱分类

(1) 恒星的光度级分类(Luminosity Classes)

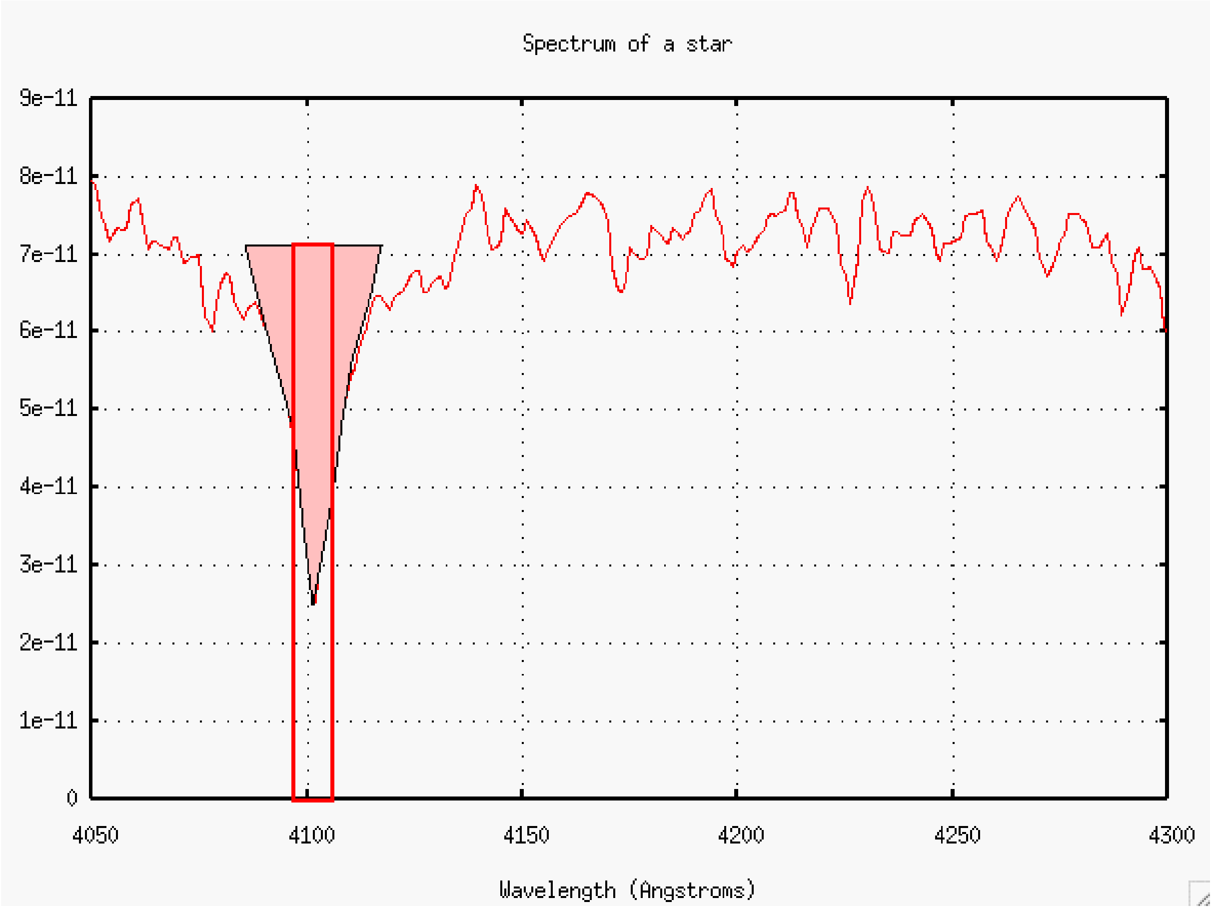
- Harvard光谱分类（根据恒星有效温度的一维分类）并不能唯一确定恒星的光谱性质和恒星在赫罗图上的位置。



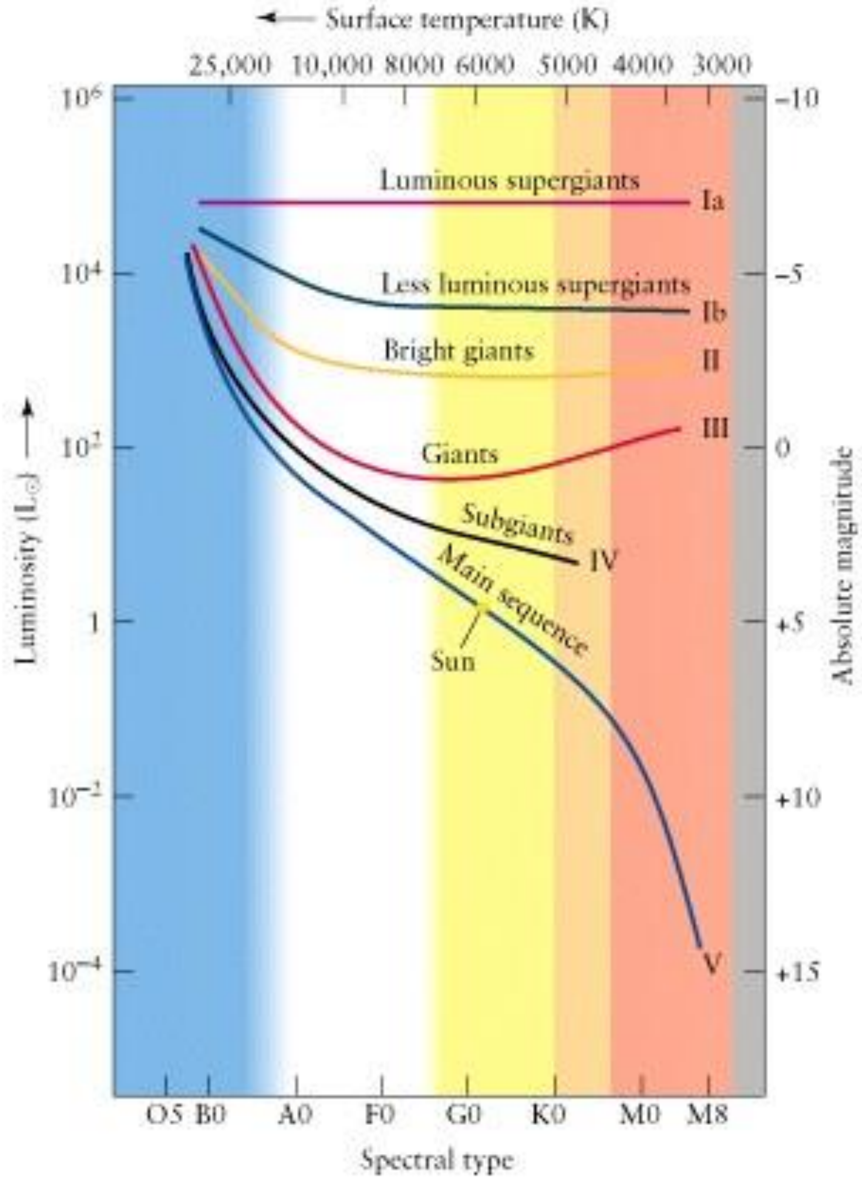


3颗A型星的Balmer线比较

等值线宽（*Equivalent Width* ）



• 1943年，Yerkes天文台的天文学家根据谱线宽度的变化，对恒星进 行光度分类。以罗马数字I – V表示，数字值越高，则谱线越宽。

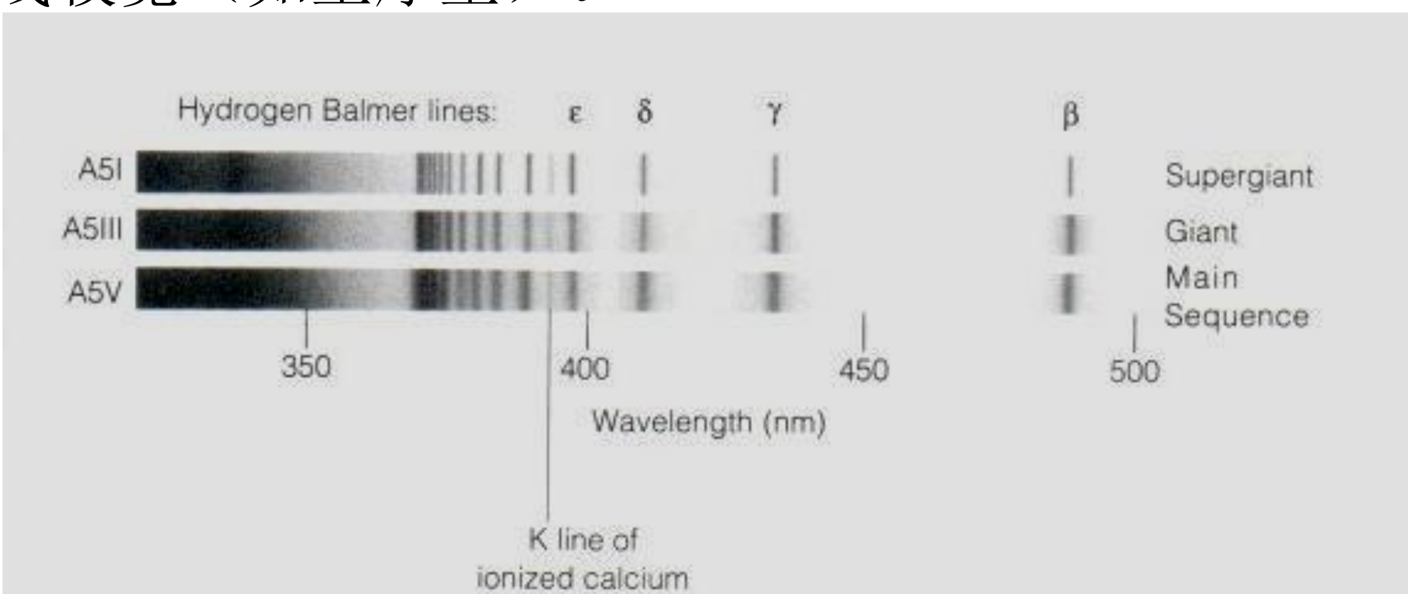


•Yerkes光谱分类实际上反映了恒星**光度的高低**

原因：谱线的**压力**（**碰撞**）致宽

恒星大气的密度和压力越高、则原子碰撞越频繁，产生的谱线越宽而气体压力的大小取决于表面重力。

恒星的光度$L \propto R^2T^4$，表面引力加速度 $g \propto M^2R^{-1}$。于是L越大，g越小，密度低，压力小，谱线尖锐（如巨星）；L越小，g越大，大气密度高，压力高，碰撞频繁，谱线较宽（如主序星）。



根据恒星光度的高低，将恒星分为I –VII七个光度级。

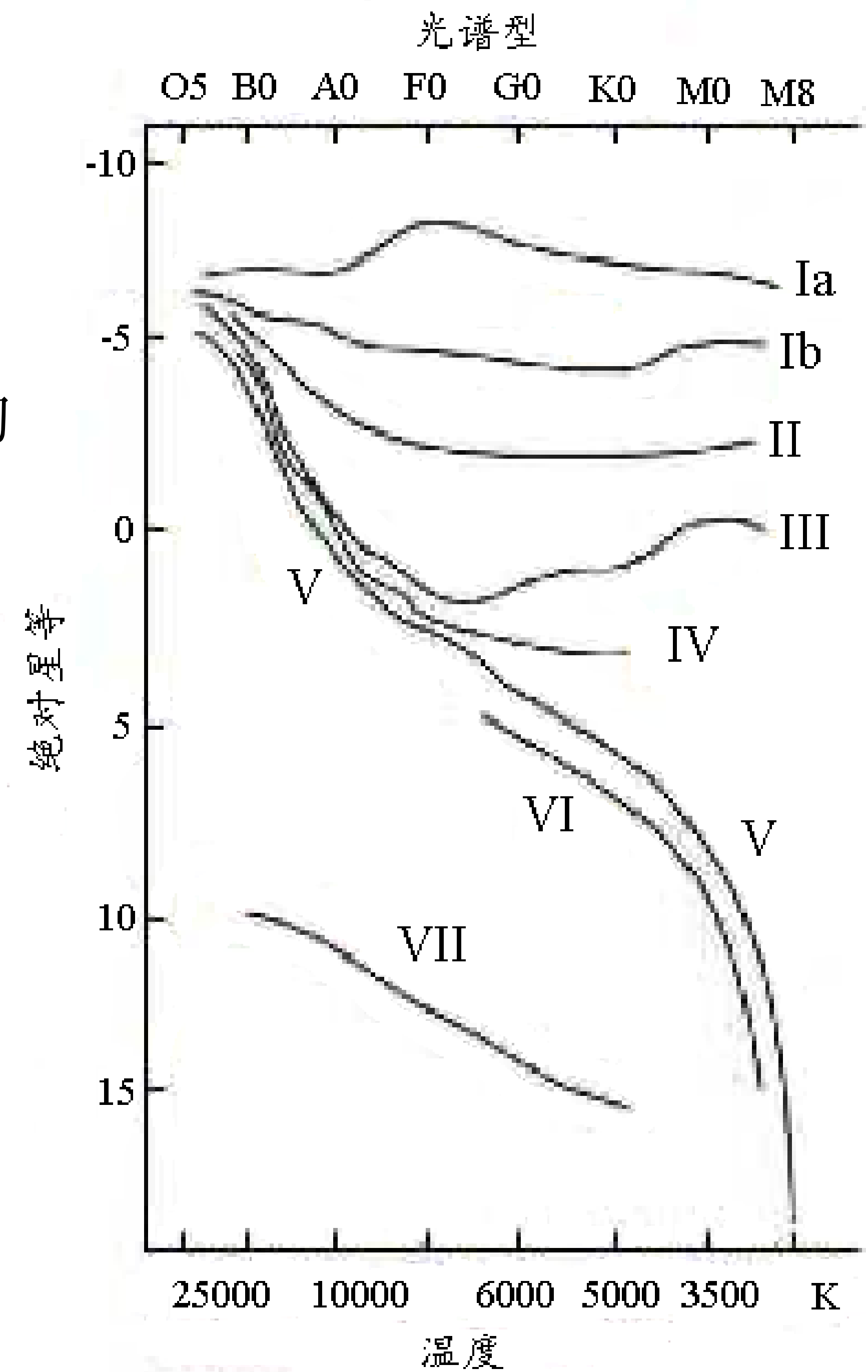
光度级数值越小，表明恒星的光度越高。

Ia—最亮超巨星、
Ib—次亮超巨星、

II—亮巨星、
III—巨星、

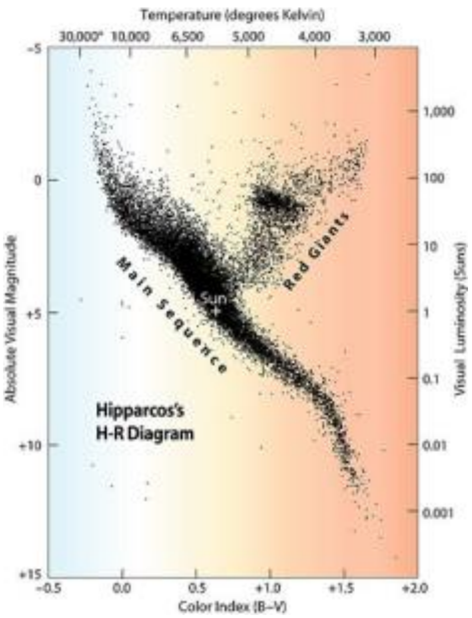
IV—亚巨星、
V—矮星、
VI—亚矮星、

VII—白矮星



(2) 恒星的二元光谱分类

- 在光谱分类的基础上，结合恒星的光度级分类得到恒星的二元光谱分类 。如太阳的光谱型为G2V。
- 由恒星的光谱型可以确定恒星的表面温度和光度，即恒星在赫罗图上的位置。



§ 1.3 星族

1 银河系概况

2 球状星团与疏散星团

3 星团的赫罗图

4 星族

Walter Baade（1944）

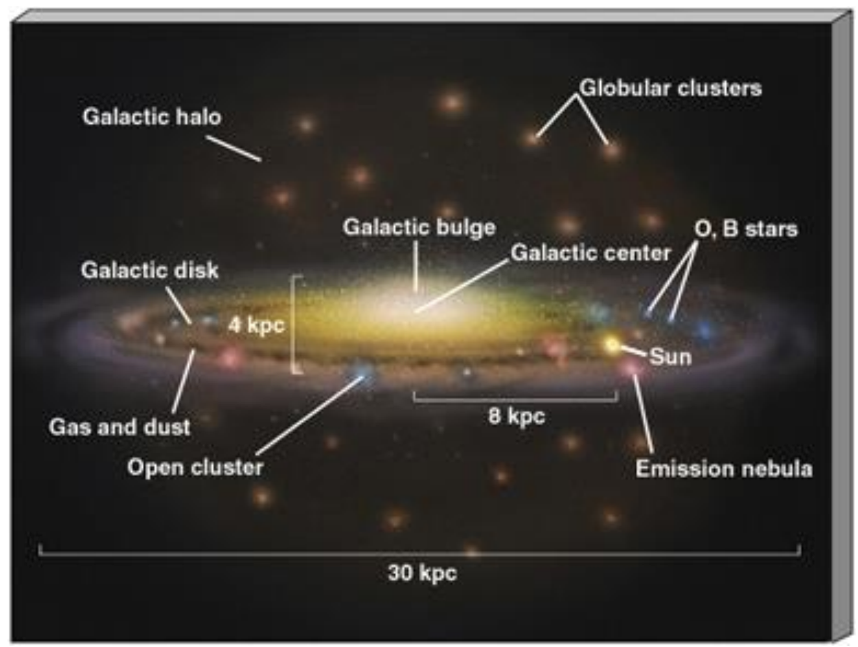
发现星系晕与核球中的恒星明显比盘中的恒星颜色偏红。

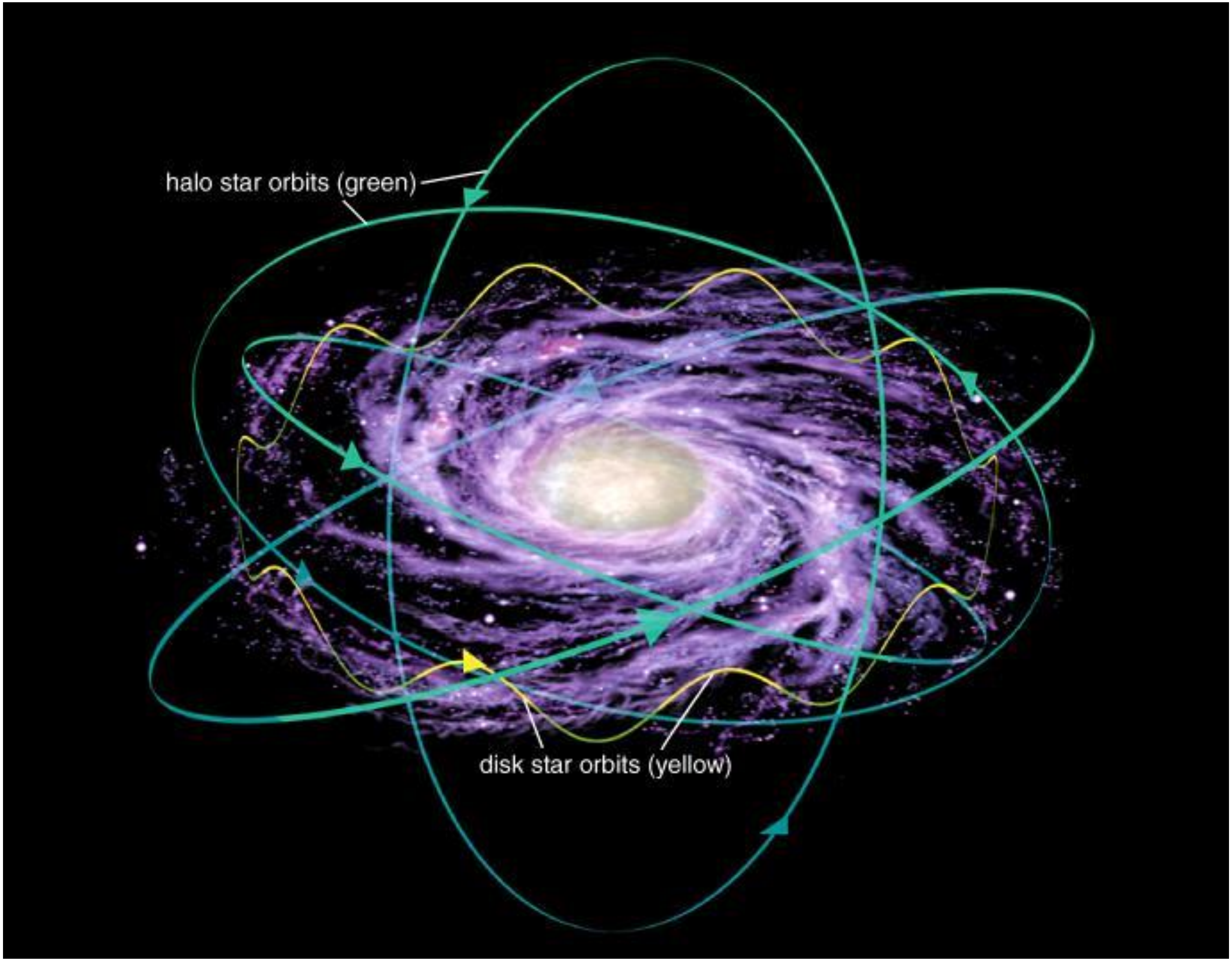
银河系概况

银河系是一个旋涡星系 。

由核球（Nuclear Bulge）、盘（Disk）和延伸到更大范围的晕（Halo）组成。太阳到银河系中心的距离约为8.1(～8.5) kpc 处。

银河系核球较小，总质量约为$10^9M_\odot$。银盘总质量约为$10^{11}M_\odot$。银晕的范围估计远远超过银盘，其总质量估计为盘质量的十倍左右。




halo star orbits (green)
disk star orbits (yellow)

球状星团与疏散星团

恒星具有成群成团的普遍现象，人们发现，存在着几种不同类型的恒星集团，它们在银河系内的空间分布运动性质及其一些物理特性明显地不同，人们进一步根据恒星在银河系内空间分布和运动性质的特点将它们划分为同的次系与子系。具体分为扁平子系、球状子系和中介子系。

疏散星团（Open Clusters）

形态	不规则
大小	～6-50 ly
质量	～10^2-10^3 $M_\odot$
恒星密度	～0.1-10 $M_\odot$ ly^{-3}
空间分布	银道面附近 $Z < 200$ pc
成员星	年轻、中等年龄恒星

- 几百颗恒星组成
- 年龄10^6 - 10^9 年
- 通常可见到气体和星云

昴星团（Pleiades 8 x 10^7 yrs）

球状星团（Globular Clusters）

形态	球形或扁球形
大小	～60-300 ly
质量	～10^4-10^7 $M_\odot$
恒星密度	～1-100 $M_\odot$ ly^{-3}
空间分布	以银心为球心的球状分布，$d \le 35$ kpc
成员星	年老的、贫金属恒星

- 几十万颗恒星组成
- 年龄10^{10}年
- 不含气体和星云

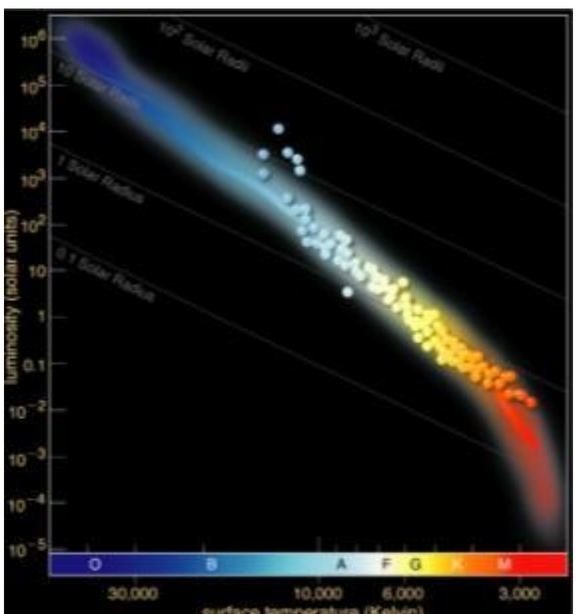
M 80 (1.2 x 10^{10} yrs)

星团的赫罗图

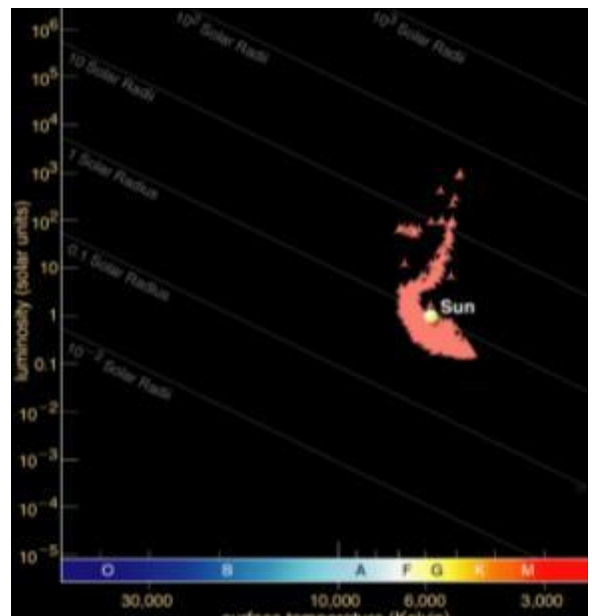
星团对于研究恒星演化十分重要：

星团内部的恒星距我们近似有相同的距离，只要确定一颗恒星的光度（绝对星等），所有恒星的光度就都确定了。

星团中的恒星可以近似认为是同时诞生的。

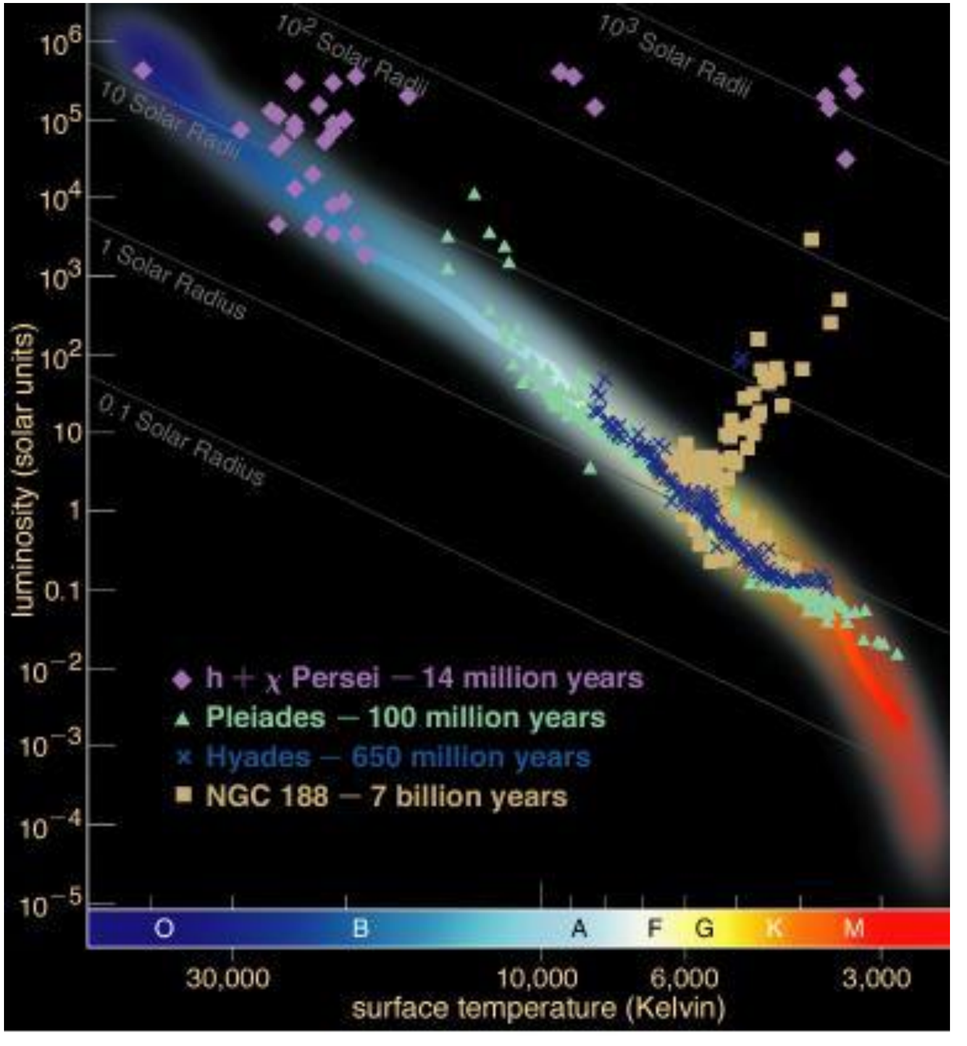


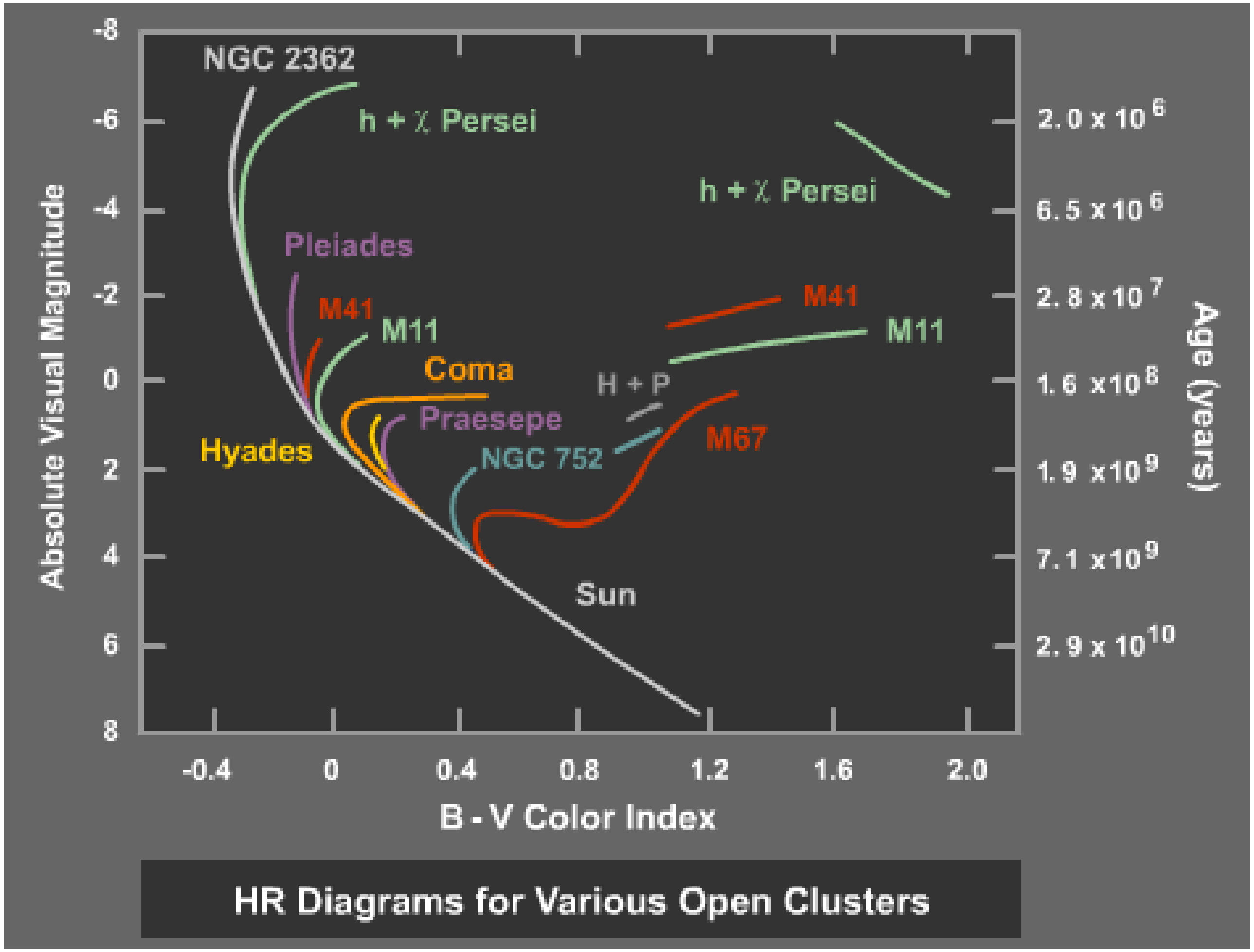
Pleiades H-R 图



Globular Cluster H-R图

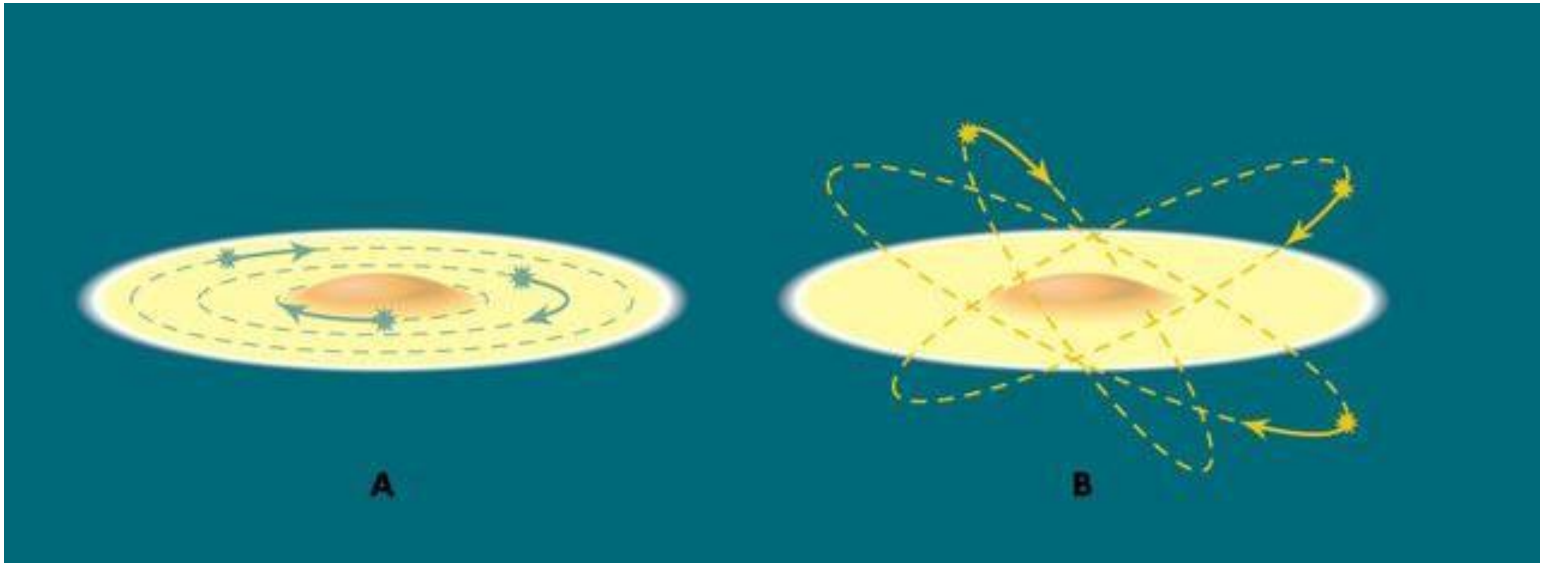
赫罗图脱离主序的位置对应着星团的年龄




NGC 2362
h + χ Persei
h + χ Persei
Pleiades
M41
M11
M41
M11
Coma
H + P
Praesepe
M67
Hyades
NGC 752
Sun
Absolute Visual Magnitude
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
-0.4
0
0.4
0.8
1.2
1.6
2.0
B - V Color Index
2.0 x 10 6
6.5 x 10 6
2.8 x 10 7
1.6 x10 8
1.9 x10 9
7.1 x10 9
2.9 x 10 10
Age (years)
HR Diagrams for Various Open Clusters

星族(Stellar Population)

1944年，B.Baade将银河系内的恒星分为两大类，星族 I 和星族 II 恒星 。(Population III)



星族I与星族II天体的特征

星 族	极端星族II (晕星族II）	中介星族II	盘星族	中介星族I (年老星族I)	极端星族I (年轻星族I)
典型天体	亚矮星、球状星团、天琴RR型星	长周期变星	行星状星云、新星	A 型星、经典造父变星	气体、尘埃、超巨星
平均年龄（10^9 yr）	17-12	15-10	12-2	2-0.1	0.1
垂向距离	2000 pc	700 pc	400 pc	160 pc	120 pc
垂向速度	75 kms^{-1}	25 kms^{-1}	18 kms^{-1}	10 kms^{-1}	8 kms^{-1}
金属丰度	0.001	0.005	0.01-0.02	0.02	0.03-0.04

- 金属丰度越低的恒星离银道面越远 → 银河系演化

	Population I	**Population II**
Distribution	disk	halo / spheroid
	$\|z\| <\sim 200$ pc (O stars)	
Kinematics	disk rotation	$\sim$ no rotation
Radial dispersion	$v \sim 30$ km s^{-1}	large
Metallicity	$Z \simeq 0.02$	$Z < 0.01$
Age	young	old

第二节: 恒星内部热力学

§2. 1理想气体的状态方程

§2.2 绝热指数

§2.3 Virial定理

§2. 1理想气体的状态方程

经典理想气体的状态方程

经典理想气体的状态方程：压强用自由粒子的数密度 n 和温度T 来表示

$$\boxed{P = nkT}$$

状态方程也可以用质量密度来表示：

$$\boxed{P = nkT = \frac{\rho}{m_u \mu} kT = \frac{\Re}{\mu} \rho T}$$

单位质量的普适气体常数$\Re = k / m_u = 8.31 \times 10^{+7}$ erg K^{-1} g^{-1}，原子质量单位 m_u = 1 amu =1.66053 × 10^{-24} g , μ为分子量。对单原子气体，粒子数密度与质量密度之间满足关系

$$n = \frac{\rho}{m_u \mu}$$

物质的平均分子量

对多原子气体，或电离气体，也可以给出类似的表达式，

$$\boxed{P = nkT = \frac{\Re}{\mu}\rho T}$$

不过其中 μ 为**平均分子量**（*the mean molecular weight per particle*）

对于恒星内部化学组成，人们常采用*X*，*Y*表示氢和氦的质量丰度(***the fraction of mass or mass abundance***)，*Z*表示除氢和氦以外所有重元素的质量丰度。

定义

$$X_i = m_i \times n_i / \rho$$

由此定义显然有：$X + Y + Z = 1$

而混合气体压强取决于自由粒子的数密度，即

$$P = nkT = P_e + P_i = n_e kT + n_i kT$$

$$\boxed{\mu = \frac{\rho}{m_u n}}$$

电子的压强 $P_e = n_e kT = \dfrac{\rho}{\mu_e m_u} kT$

离子的压强 $P_i = n_i kT = \dfrac{\rho}{\mu_i m_u} kT$

总的压强 $P = P_e + P_i = (n_e + n_i) kT = \dfrac{\rho}{\mu m_u} kT$

§2.1理想气体的压强公式（状态方程）

推求状态方程的基本思路：

相空间内微观状态数

每个状态上粒子的占据数

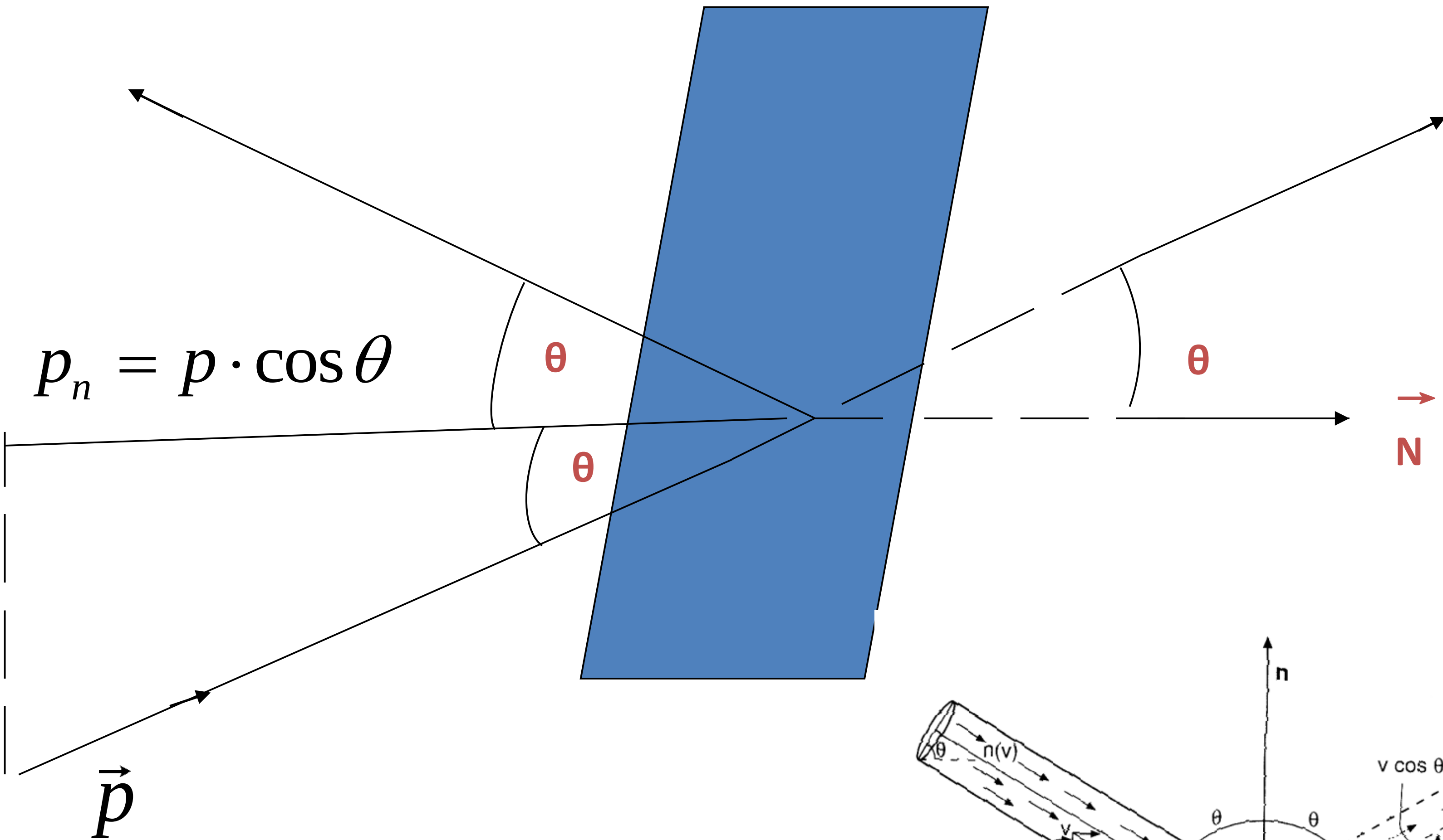
粒子在动量空间的分布函数

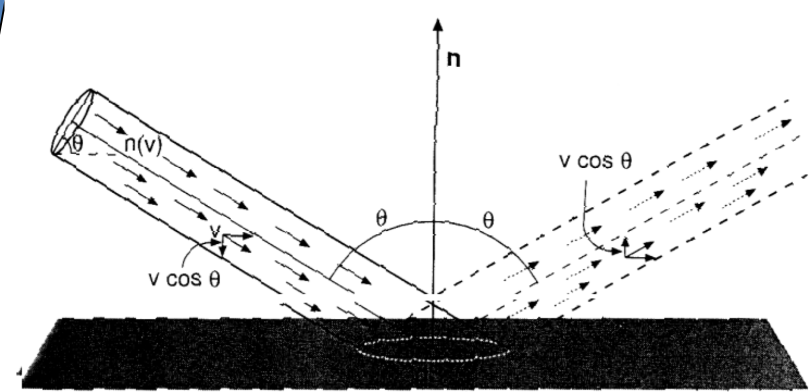
根据动量定理来推求微观粒子与器壁碰撞产生的压强

(压强公式的推导)

微观粒子同器壁表面碰撞时的动量转移

$$p_n = p \cdot \cos\theta$$





假想粒子同某一表面（其法线方向为）碰撞，从入射角等于反射角的原理，其法向动量改变为 $\overrightarrow{N}$ ：

$$\Delta p_n = -2p_n = -2\vec{p}\cdot\vec{N}$$

根据动量定理，粒子的动量改变的原因：它受了器壁的作用力

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

气体分子对器壁有一个反作用力，其大小与 $\vec{F}$ 相同，方向相反。

气体压强实际上就定义为气体大量粒子在单位时间内施加在该表面单位上的平均作用力。

$\Delta\vec{p}_n$ 表示粒子轰击该表面一次所产生的动量转移。

设*n(p)*d*p*为粒子数密度按动量的分布函数。则 $\vec{v}_p\cdot\vec{N}n_{(p)}dp$

为1秒内有数量为 $(\vec{p}\cdot\vec{v}_p)$

的粒子撞在该表面单位面积的粒子数。

1秒钟内气体粒子在撞击该器壁时的总动量转移为

$$\vec{v}_p \cdot \vec{N}_n(p)dp \cdot \Delta p_n$$

动量转移的原因是∵器壁对气体粒子的作用力，而同时气体分子对器壁有一个反作用力——平均后即气体对器壁的压强。

$$P = \overline{\vec{F}}$$

因此，动量为 $\vec{p}$ 速度为 $\vec{V}_p$ 的气体微粒对压强的贡献为：

$$dP = -\vec{v}_p \cdot \vec{N}n(p)dp \cdot \Delta p_n = 2(\vec{v}_p \cdot \vec{N})(\vec{p} \cdot \vec{N})n(p)dp$$

压强公式

选取 $\vec{N}$ 方向为极轴，

$$\vec{p} \cdot \vec{N} = p\cos\vartheta$$

将它对各种动量大小及其方向积分 $(\vec{v}_p // \vec{p})$

$$P = \int_0^\infty dp \cdot \frac{1}{4\pi}\int_{2\pi} 2(\vec{v}_p \cdot \vec{N})(\vec{p} \cdot \vec{N}) n(p) d\Omega$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^\infty p v_p n(p) dp$$

$$v_p = \partial E / \partial p \qquad v_p = \begin{cases} p/m & (\text{非相对论}) \\ \dfrac{c^2 p}{E} & (\text{相对论}: E^2 = p^2c^2 + m^2c^4) \end{cases}$$

经典理想气体的状态方程

非相对论经典Boltzmanu-Maxwell气体

$$n(p)dp = \frac{N}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-p^2/2mkT} 4\pi p^2 dp$$

$$P = nkT$$

$$= \frac{\Re}{\mu} \rho T$$

辐射压

$$P_{rad} = \frac{1}{3}u_r = \frac{1}{3}aT^4$$

理想气体与辐射场的混合系统，总的压强

$$P = P_{gas} + P_{rad} = \frac{\rho}{\mu m_u}kT + \frac{1}{3}aT^4$$

在低温时将以理想气体的压强为主，在高温时将以辐射压为主。在

$$\frac{\rho}{\mu m_u}kT = \frac{1}{3}aT^4 \qquad \frac{\rho}{\mu} = \left(\frac{T}{3.2\times10^7\ \mathrm{K}}\right)^3\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$$

两者相当，即给出了两者间的临界曲线。即当

$$T_7 > 3.2(\rho/\mu)^{1/3}$$

时，辐射压强为主，超过理想气体压强。

量子气体的状态方程

相空间内微观状态数

由海森堡的测不准原理 $\delta x \cdot \delta p_x \geq h$

一个粒子在相空间（$\vec{x}, \vec{p}$ ）占有的最小体元的大小为h^3。
按照统计物理方法，在6维相空间中的微观状态数目为

$$\delta N_{phase} = \frac{1}{h^3} dxdydzdp_x dp_y dp_z$$

于是在体积为V的容器内，动量在p到$p+dp$间隔内的可能微观状态数近似为

$$dN(p) \approx \frac{V \times 4\pi p^2 dp}{h^3}$$

动量空间的微分体元

坐标空间的态密度

$$dn(p) = \frac{dN(p)}{V} \approx \frac{4\pi p^2 dp}{h^3}$$

对确定动量的状态，因为粒子的自旋，偏振不一样，对应着不同的量子态。因此还应该考虑统计权重

$$\boxed{g(p)dp = g_s \frac{4\pi p^2}{h^3} dp}$$

每个状态上粒子的占据数

根据量子统计, 每个状态上粒子的占据数为

$$f(E)=\frac{1}{e^{(E-\mu)/kT}\pm 1}$$

E :能量; k : Boltzmann 常数; T :温度; μ : 化学势

+ 号对应于费米子(Fermions) : 自旋为半整数(电子、中微子、质子、中子) ,遵从 **Fermi-Dirac 统计**.

- 号对应于玻色子(Bosons) : 自旋为整数(光子、π 介子), 遵从 **Bose-Einstein 统计**.

粒子在动量空间的分布函数

$n(p)$

动量在 p 至 $p+dp$ 的粒子数密度为状态数密度乘以每个状态上粒子的(平均)占据数

$$\boxed{n(p)4\pi p^2}dp = g_s \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} \pm 1}$$

由统计力学，在热动平衡（统计平衡）状态下可以给出系统内部粒子在动量空间的分布函数为：

$$n(p) = \frac{1}{h^3} \sum_j \frac{g_j}{\exp[(\mathcal{E}_j + \mathcal{E}(p) - \mu)/kT] \pm 1}$$

用这个统计关系作为基础，可以来导出宏观物理量。在此我们假定了粒子在相空间的分布为各向同性的。

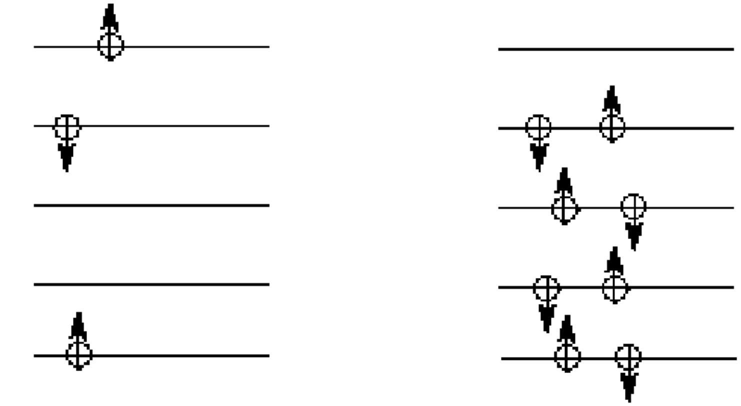
简并物质（Degenerate material）状态方程

在极高密度或低温的情况下，粒子的量子效应将体现出来，在此我们主要探讨费米简并气体的一些性质。

简并压的物理原因：

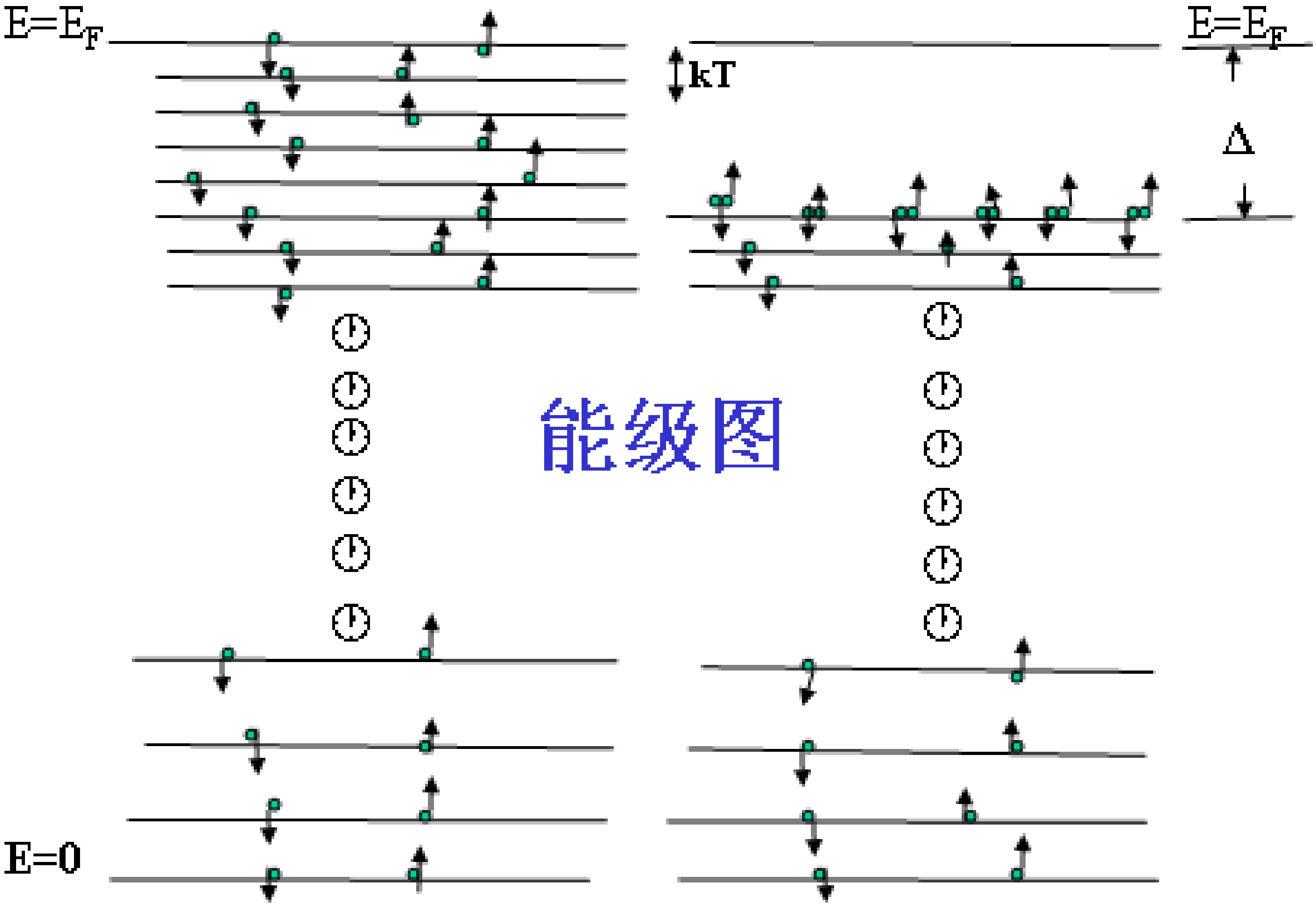
– Pauli不相容原理：费米子不可能占据两个相同的能态

– Heisenberg测不准原理 $\triangle x \triangle P_x > h$



电子(Fermi)简并(Pauli原理)

正常Fermi粒能级占据图　　超流超导Fermi粒子能级占据图



$$n(p)4\pi p^2 dp = g_s \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} \pm 1}$$

$$n(p) = \frac{1}{h^3} \sum_j \frac{g_j}{\exp[(\mathcal{E}_j + \mathcal{E}(p) - \mu)/kT] \pm 1}$$

在此以电子为例，电子具有两个不同的自旋态，即简并度取为$g_s = 2$，化学势不为零，根具电子能量的高低，电子的动能有不同表示形式（即考虑相对论效应），显然电子也不具备激发态，电子为自旋等于½ 的费米子。将这些参数代入可得到Fermi-Dirac分布。

$$n(p)4\pi p^2 dp = \frac{2}{h^3} \frac{4\pi p^2}{\exp[(m_e c^2 + \varepsilon(p) - u)/kT] + 1} dp$$

其中粒子的动能为

$$\mathcal{E}(p) = mc^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} - 1 \right]$$

粒子的运动速度为

$$v = \frac{p}{m} \left[1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{pc^2}{E}$$

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{(E - E_F)/kT}}$$

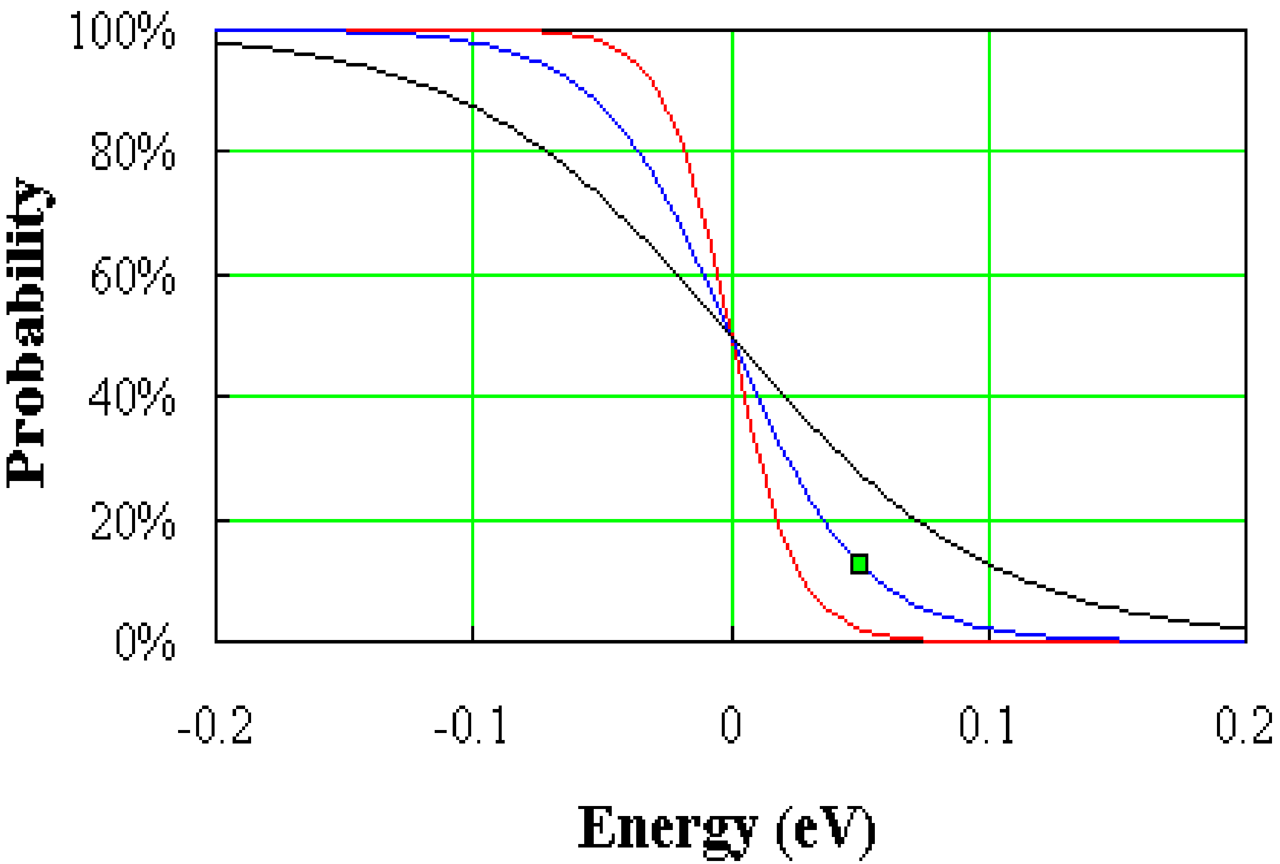
T (green square)	300 K
$E-E_F$	0.05 eV
T_1 (red curve)	150 K
T_2 (blue curve)	300 K
T_3 (black curve)	600 K

Plot control parameters

E_{min}	-0.2 eV
E_{max}	0.2 eV

Calculated value

$f(E-E_F)$	0.1265



根据电子的简并强弱，以及相对论性的大小，可以分几种具体的情况来进行讨论。

完全简并

$$n(p)4\pi p^2 dp = \begin{cases} \dfrac{2}{h^3}4\pi p^2 dp & p \le p_F \\ 0 & p > p_F \end{cases}$$

其中p_F 对应着Fermi 动量。

定义:无量纲动量x

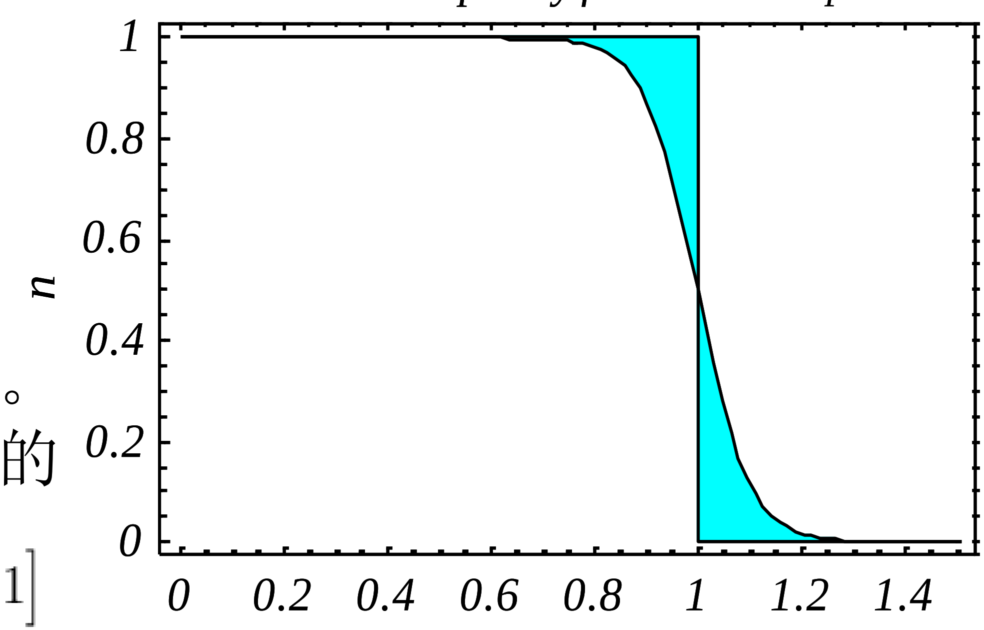
$$x \equiv \frac{p}{m_e c}$$

可以表示粒子相对论性的大小。
另外可以给出与费米动量对应的费米能

$$\mathcal{E}_F = mc^2\left[(1+x_F^2)^{1/2} - 1\right]$$

$$E_F = m_e c^2\sqrt{{x_F}^2 + 1}$$

FD Occupancy for T 0.05 T_F



电子的Compton波长 ≈ 2.43 × 10^{-12} m

积分可得粒子的数密度：

$$n = \frac{8\pi}{h^3}\int_0^{p_F} p^2 dp = 8\pi\left(\frac{h}{mc}\right)^{-3}\int_0^{x_F} x^2 dx = \frac{8\pi}{3}\boxed{\left(\frac{h}{mc}\right)}^{-3} x_F^3$$

对于完全简并的电子有

$$n_e = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{h}{m_e c}\right)^{-3} x_F^3 = 5.9\times10^{29} x_F^3\ \mathrm{cm}^{-3}$$

因 $n_e = \rho / (\mu_e m_u)$，其中μ_e为电子的平均分子量。上式可以改写为

$$\rho = \rho_0 \mu_e x_F^3$$

其中x_F为无量纲Fermi动量

$$\rho_0 = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{m_e c}{h}\right)^3 m_\mu \approx 9.8\times10^5\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$$

即只有在密度超过10^6 g cm^{-3} 时，物质才近似完全简并了(?)。

$$P = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} pvn(p)4\pi p^2 dp$$

$$v = \frac{p}{m}\left[1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2\right]^{-1/2}$$

完全简并气体压强为

$$P_e = \frac{8\pi}{3}\frac{m_e^4 c^5}{h^3}\int_0^{x_F}\frac{x^4 dx}{(1+x^2)^{1/2}} = Af(x)$$

其中

$$A = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{m_e c}\right)^{-3} m_e c^2 = 4.8\times 10^{23}\ \text{erg cm}^{-3}$$

$$f(x) = x(2x^2-3)(1+x^2)^{1/2} + 3\sinh^{-1}x$$

同样，我们可以给出内能密度(erg cm^{-3})

$$E_e = \int_0^{\infty} E_k(p)n(p)4\pi p^2 dp = Ag(x)$$

$$E_k = mc^2\cdot\left\{\left[1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2\right]^{1/2} - 1\right\}$$

其中

$$g(x) = 8x^3[(1+x^2)^{1/2}-1] - f(x)$$

完全简并物质的一个重要性质是其压强与温度无关。

两种极端情况

1）非相对(NR)论情况（$x_F \sim 0$）

$$P_e \propto E_e \propto x_F^{\ 5} \propto \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3}$$

$$\boxed{P_e = \frac{2}{3} E_e}$$

2）极端相对论(UR)情况（$x_F >> 1$）

$$P_e \propto E_e \propto \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3}$$

$$\boxed{P_e = \frac{1}{3} E_e}$$

简并压强的判据

由此可给出ρ -T 平面上的第二条分界线

非相对论完全简并电子气体与理想气体的分界

非相对论完全简并物质的压强为

$$P_e = \frac{8}{5} A x_F^{\ 5} = \frac{1}{20}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e} n_e^{\ 5/3}$$

$$A = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{m_e c}\right)^{-3} m_e c^2$$

$$n_e = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{h}{m_e c}\right)^{-3} x_F^{\ 3}$$

$$n_e = \rho / (\mu_e m_u)$$

$$= \frac{1}{20}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e m_u^{\ 5/3}} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3}$$

$$\approx 1.0 \times 10^{13} \left(\frac{\rho / \mathrm{g\ cm}^{-3}}{\mu_e}\right)^{5/3} \ \mathrm{dynes/cm}^2$$

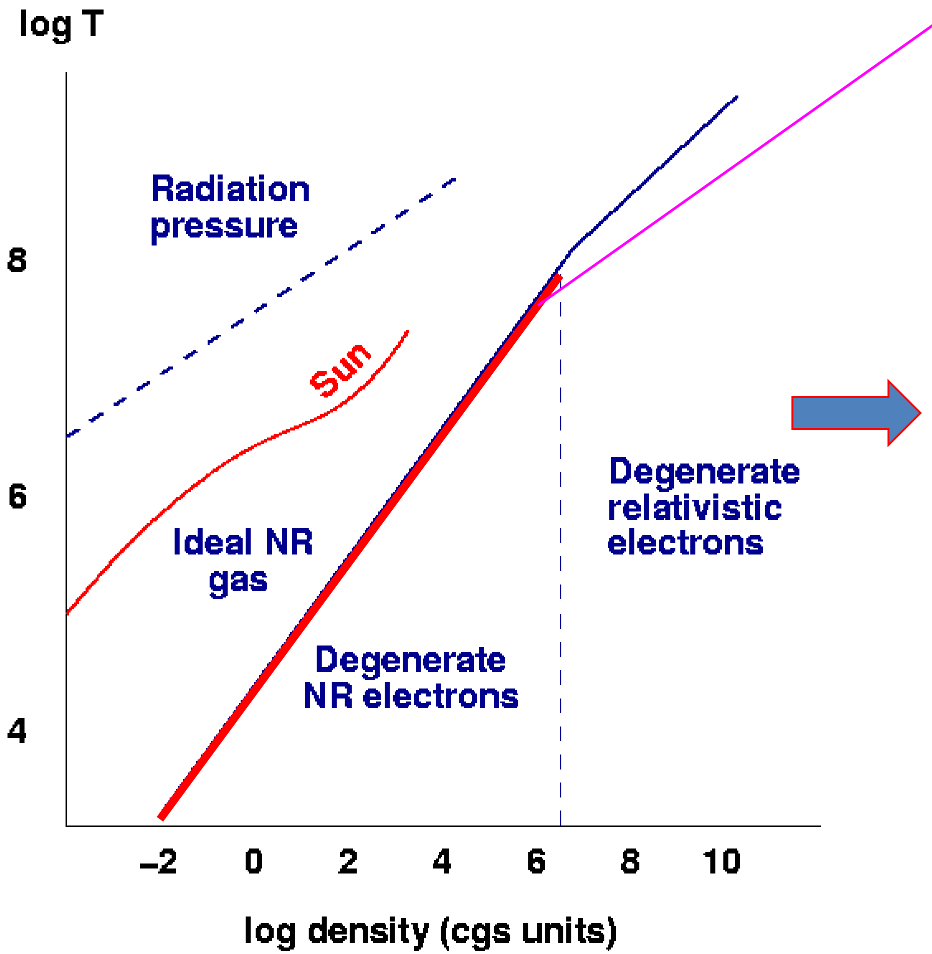
理想气体的压强为 $$P_{gas} = \frac{\rho}{\mu_e m_u} kT$$

即当 $$\boxed{(\rho/\mu_e) > 2.4 \times 10^{-8} T^{3/2}\ \mathrm{g\ cm}^{-3}}$$ $$\boxed{(\rho_4/\mu_e) > 2.4 T_8^{3/2}\ \mathrm{g\ cm}^{-3}}$$

将以电子的简并压为主。$\rho_4=\rho/10^4$ g/cm^3; $T_7=T/10^7$K

$$\left(\rho/\mu_e\right) > 2.4\times10^{-8}T^{3/2}\ \text{g cm}^{-3}$$

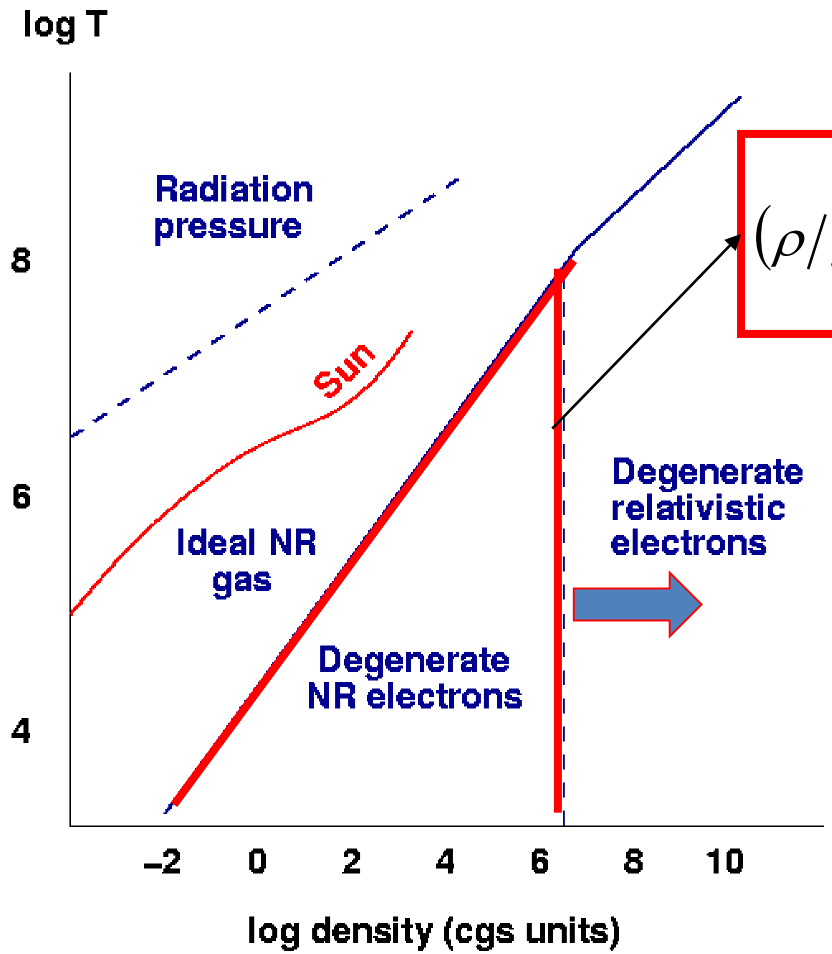
$$\frac{\rho_4}{\mu_e} = 2.4T_8^{3/2}$$



$$n_e = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{h}{m_e c}\right)^{-3} x_F{}^3$$

近似取$p_F > 2\ m_e c$, ($x_F \sim 2$)时，过渡到相对论情形

$$n_e = \rho / (\mu_e m_p)$$



$$\boxed{(\rho/\mu_e) > \frac{8\pi}{3}\left(\frac{h}{m_e c}\right)^{-3} m_p \times 8}$$

$$\approx 7.85\times10^6\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$$

非相对论完全简并与极端相对论完全简并的分界

相对论完全简并电子气体与理想气体的分界

相对论完全简并物质的压强为

$$\boxed{P_e = 2Ax_F{}^4 = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\frac{hc}{8}n_e{}^{4/3}}$$

$$A = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{m_e c}\right)^{-3} m_e c^2$$

$$n_e = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{h}{m_e c}\right)^{-3} x_F{}^3$$

$$n_e = \rho / (\mu_e m_u)$$

$$= \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\frac{hc}{8m_u{}^{4/3}}\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3}$$

$$\approx 1.24\times10^{15}\left(\frac{\rho/\mathrm{g\ cm^{-3}}}{\mu_e}\right)^{4/3}\ \mathrm{dynes/cm^2}$$

理想气体的压强为 $P_{gas} = \dfrac{\rho}{\mu_e m_u}kT$

即当

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(\rho/\mu_e\right) > 3.077\times10^{-22}T^3\ \mathrm{g\ cm^{-3}} \\ \rho_2/\mu_e > 3.077T_8^3 \qquad (\rho > 7.85\times10^6 g/cm^3) \end{array}}$$

将以电子的简并压为主。

在中间区域（极端相对论和非相对论之间）的状态方程

1）利用严格的表达式来计算

简并压强为

$$n_e = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{h}{m_e c}\right)^{-3} x_F{}^3$$

$$n_e = \rho / (\mu_e m_p)$$

$$P_e = \frac{8\pi}{3}\frac{m_e^4 c^5}{h^3}\int_0^{x_F}\frac{x^4 dx}{(1+x^2)^{1/2}} = Af(x)$$

其中

$$A = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{m_e c}\right)^{-3} m_e c^2 = 4.8\times 10^{23}\ \mathrm{erg\ cm^{-3}}$$

$$f(x) = x(2x^2-3)(1+x^2)^{1/2} + 3\sinh^{-1}x$$

2）可以利用近似公式来计算

$$\boxed{P_{e,approx} \approx \left(P_{e,NR}^{-2} + P_{e,UR}^{-2}\right)^{-1/2}}$$

$$P_{e,NR} = \frac{8}{5} A x_F{}^5$$

$$P_{e,UR} = 2 A x_F{}^4$$

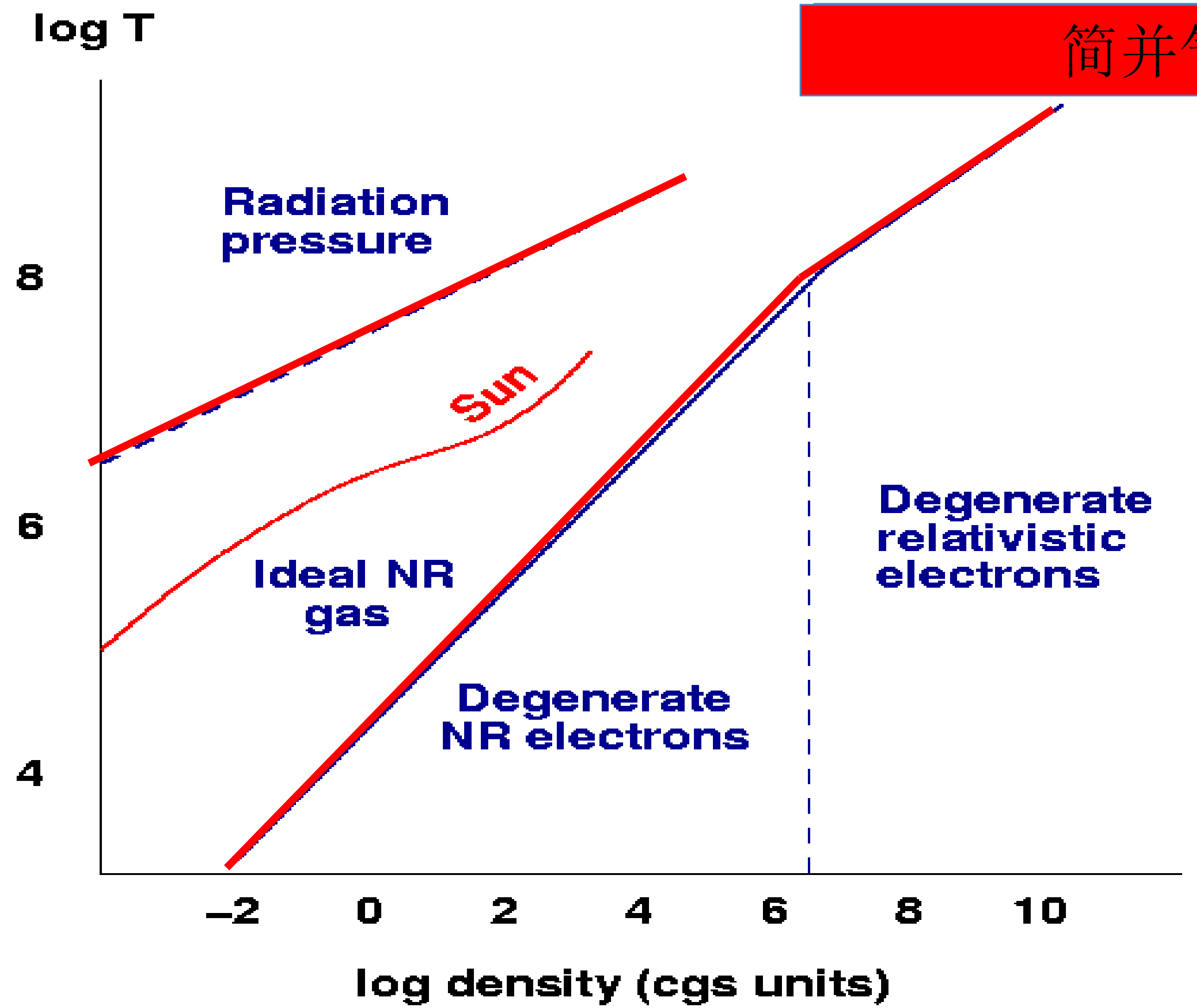
精度达到2% 。

物态方程

理想气体

光子气体

简并气体



简并电子气体在恒星晚期演化中起的作用

1．红巨星核心以及白矮星内部，不存在产能过程，靠电子的简并压与引力抗衡，并决定着星体的进一步演化。

2．电子简并压强几乎与温度无关（特别是在强简并情况下）。

$$\left(\frac{\partial P_e}{\partial T}\right)_{n_e} = \frac{8\pi k}{3h^2}(2mkT)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{5}{2}F_{3/2} - \frac{3}{2}F_{1/2}\frac{dF_{3/2}/da}{dF_{1/2}/da}\right)$$

$$= \frac{P_e}{T}\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\frac{F_{1/2}}{F_{3/2}}\frac{dF_{3/2}/da}{dF_{1/2}/da}\right)$$

$$a = -u / kT$$

简并电子气体在恒星晚期演化中起的作用(2)

3．简并物质的热核反应是（热力学上）绝对不稳定的，由于简并物质内压强的电子简并压为主，它却几乎不随温度变化。导致系统猛烈地向外爆炸——即爆炸性核燃烧。

4．简并气体，能量向外转移方式以热传导为主（若中微子大量产生，以中微子辐射能量损失为主）。

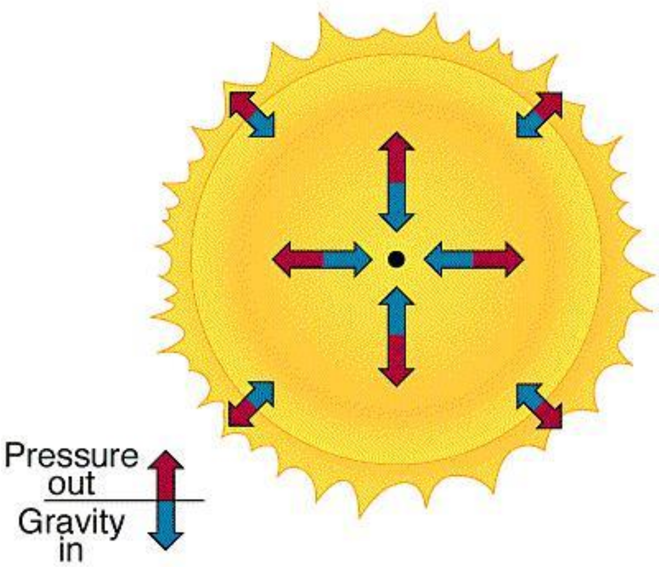
5．非相对论完全简并气体球（例：小质量白矮星，中子星）在动力学上是稳定的；极端相对论完全简并气体球（例如：质量达到Chandrasekhar极限值的白矮星）在动力学上是绝对不稳定的，星体将出现引力坍缩。**Ia** 型超新星爆发和**II**型（以及**Ib** 型）超新星核心坍缩都同这个性质紧密相关。

简并电子气体在恒星晚期演化中起的作用(3)

6．在强简并电子气体中，任何物理过程（例如β⁻衰变，以及$\gamma + \gamma \rightarrow e^{+} + e^{-}$，即光子对消灭为正、负电子对），如果产生电子，而出射电子能量低于电子气体的Fermi能的话，则由于Pauli原理这种过程是禁戒的。

7．在电子强简并的物质中，如果物质密度非常高，以致电子Fermi能很高，超过了某种原子核的电子俘获能阈值时，则电子俘获过程就会大量进行，它将导致前述物质状态方程的多方指数（或绝热指数）远小于1，因而系统在动力学上将出现不稳定坍缩。也就是说：密度非常高的电子强简并气体内的电子俘获过程导致星体坍缩是II型超新星（SNII）核心坍缩的最重要因素，也是使SNI_a加速坍缩的重要因素。

§ 2.2 绝热指数



准静态过程与绝热指数

恒星在演化的过程中经历着膨胀和收缩，恒星显然并非完全静态的物体。但如果**变化的过程及其缓慢**，可以认为过程中**经历的每一个状态**均为**平衡态**，这就是**准静态过程**。准静态过程是一个可逆过程。

1. 理想的非简并气体的比热以及绝热指数

2. 非简并理想气体与辐射场的混合系统

3. 部分电离气体的热力学

热力学第一定律

$$\delta Q = dU + P\,dV$$

其中U为系统的内能，P、V 分别为压强和体积，δQ表示系统吸收的热量 。

$$\delta Q = T\,dS$$

其中S是描述系统状态的函数、称为熵（*entropy*）。如果系统的内能认为是$U(V,T)$的函数，则

$$dS = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]dV + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT$$

因S *也是*$S(V,T)$的函数 $dS = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT$

11. 理想的非简并气体的比热以及绝热指数

理想气体的状态方程为

$$PV = \frac{R}{\mu}T$$

其中V为单位质量的气体所占的体积（$V = 1/\rho$），称比容。

热力学第一定律

$$dQ = dU + PdV \qquad TdS = dU - Pd\rho/\rho^2$$

对于理想气体，内能仅仅是温度的函数，于是有

$$dQ = \frac{dU}{dT}dT + PdV \qquad *$$

定容比热为

$$c_V \equiv \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = \frac{dU}{dT} \qquad c_v = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_\rho = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\rho = \frac{dU}{dT}$$

为求定压比热，我们利用理想气体状态方程的微分形式

$$PdV + VdP = \frac{R}{\mu}dT$$

代入*式，可以得到

$$dQ = \left(\frac{dU}{dT} + \frac{R}{\mu}\right)dT - VdP$$

于是有

$$c_p = c_V + \frac{R}{\mu} \qquad c_p = \left(\frac{\delta Q}{\partial T}\right)_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$$

如果是非理想气体，U = U(V, T)，不难证明

$$c_P - c_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

$$\delta Q = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]dV + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dT = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\cdot\left[\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT\right] + c_v dT = c_p dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP$$

在许多的热力学应用中，比热的比值，c_P/c_V，是一个非常重要的量，用希腊字母 γ 表示，它依赖于气体的自由度的数目，f (包括分子平动、转动和振动自由度)。

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = 1 + \frac{2}{f}$$

$$\boxed{c_v = \frac{f}{2}\frac{\Re}{\mu}}$$

理想气体

如对于单原子或完全电离的理想气体，具有3个平移自由度，于是有$f = 3$,可解得$\gamma = 5/3$。

可以试算一下单原子理想气体的指数 γ = 5/3。

$$P_{gas} = nkT = \frac{\Re}{\mu}\rho T \qquad U_{gas} = \frac{3}{2}nkT \qquad \Re = k / m_u$$

对于双原子、多原子理想气体呢？

考虑**绝热变化**，对于理想气体，热力学第一定律可写为：

$$dQ = c_V dT + \frac{RT}{\mu V} dV.$$

$$\boxed{c_p = c_V + \frac{R}{\mu}}$$

绝热变化，即与外界不存在热交换，$dQ = 0$，于是有

$$c_V \frac{dT}{T} + (c_p - c_V) \frac{dV}{V} = 0$$

对于理想气体比热为常数，积分可得

$$TV^{\gamma-1} = \text{constant}$$

$$PV = \frac{R}{\mu}T$$

结合状态方程的表达式，可得到

$$\begin{aligned} TV^{\gamma-1} &= \text{constant} \\ PV^{\gamma} &= \text{constant} \\ P^{1-\gamma}T^{\gamma} &= \text{constant} \end{aligned}$$

多方指数

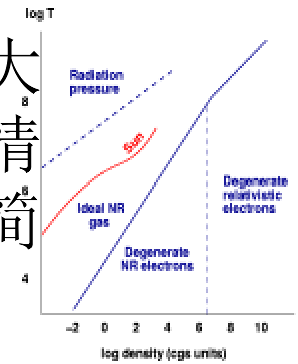
如用微分形式来表示，绝热变化满足

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T} + (\gamma - 1)\frac{dV}{V} &= 0 \\ \frac{dP}{P} + \frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{dT}{T} &= 0 \\ \frac{dP}{P} + \gamma\frac{dV}{V} &= 0 \end{aligned}$$

其中 γ 常称为绝热指数（*adiabatic exponents*）。

2. 非简并理想气体与辐射场的混合系统

通常，只有当系统的温度非常高、电离度非常大时辐射压的贡献才显得重要；而在电子简并的情况下辐射压的贡献不重要。因此我们仅考虑非简并理想气体与辐射场的混合系统的情况。



系统总的压强为

$$P = P_g + P_r = \frac{N_A k}{\mu}\rho T + \frac{1}{3}aT^4$$

每克物质的内能（比内能）

$$U = \frac{N_A}{\mu}\left(\frac{3}{2}kT\right) + aT^4 V$$

其中$V = 1/\rho$，为比体积。显然此时比内能 $U = U(T, V)$。

$$U = \frac{N_A}{\mu}\left(\frac{3}{2}kT\right) + aT^4V$$

对于准静态变化，热力学第一定律为

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + PdV$$

显然有

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 4aT^3V + \frac{3}{2}\frac{N_A k}{\mu}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = aT^4$$

$$P = P_g + P_r = \frac{N_A k}{\mu}\rho T + \frac{1}{3}aT^4$$

把状态方程代入，热力学第一定律可写为

$$dQ = \left(4aT^3V + \frac{3}{2}\frac{N_A k}{\mu}\right)dT + \left(\frac{4}{3}aT^4 + \frac{N_A k}{\mu}\frac{T}{V}\right)dV$$

对于绝热过程，我们试图得到类似于理想气体的表达式。于是可以来定义绝热指数。

$$\frac{dT}{T}+(\gamma-1)\frac{dV}{V} = 0$$

$$\frac{dP}{P}+\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{dT}{T} = 0$$

$$\frac{dP}{P}+\gamma\frac{dV}{V} = 0$$

$$\frac{dP}{P}+\Gamma_1\frac{dV}{V}=0$$

$$\frac{dP}{P}+\frac{\Gamma_2}{1-\Gamma_2}\frac{dT}{T}=0$$

$$\frac{dT}{T}+(\Gamma_3-1)\frac{dV}{V}=0$$

$$\Gamma_1=\left(\frac{\partial\ln P}{\partial\ln\rho}\right)_S$$

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2-1}=\left(\frac{\partial\ln P}{\partial\ln T}\right)_S$$

$$\Gamma_3-1=\left(\frac{\partial\ln T}{\partial\ln\rho}\right)_S$$

显然绝热指数$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$中只有两个独立。它们满足一个约束关系

$$\Gamma_3-1=(\Gamma_2-1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}.$$

只要对热力学第一定律和状态方程进行代数处理，便可以求得以上定义的绝热指数，在此以求解Γ_3， Γ_1为例。

由热力学第一定律有

$$\boxed{P = P_g + P_r = \frac{N_A k}{\mu}\rho T + \frac{1}{3}aT^4}$$

$$dQ = \left(4aT^3V + \frac{3}{2}\frac{N_A k}{\mu}\right)dT + \left(\frac{4}{3}aT^4 + \frac{N_A k}{\mu}\frac{T}{V}\right)dV$$

$$= (12P_r + \frac{3}{2}P_g)\frac{VdT}{T} + (4P_r + P_g)dV = 0$$

绝热$dQ = 0$

比较

$$\frac{dT}{T} + (\Gamma_3 - 1)\frac{dV}{V} = 0$$

有

$$\frac{dT/T}{dV/V} = 1 - \Gamma_3 = -\frac{(4P_r + P_g)}{(12P_r + \frac{3}{2}P_g)}$$

$V = 1/$❒

另外由状态方程有

$$P = P_g + P_r = \frac{N_A k}{\mu}\rho T + \frac{1}{3}aT^4$$

$$\begin{aligned} dP &= \left(\frac{4}{3}aT^4 + \frac{N_A k}{\mu}\frac{T}{V}\right)\frac{dT}{T} - \frac{N_A k}{\mu}\frac{T}{V}\frac{dV}{V} \\ &= (4P_r + P_g)\frac{dT}{T} - P_g\frac{dV}{V} \end{aligned}$$

代入☝$_1$的定义式，

$$\frac{dP}{P} + \Gamma_1\frac{dV}{V} = 0$$

$$\boxed{(4P_r + P_g)}\frac{dT}{T} + \boxed{[\Gamma_1(P_r + P_g) - P_g]}\frac{dV}{V} = 0 \qquad **$$

对绝热过程，$dQ = 0$，热力学第一定律有

$$\boxed{\left(12P_r + \frac{3}{2}P_g\right)}\frac{dT}{T} + \boxed{(4P_r + P_g)}\frac{dV}{V} = 0. \qquad **$$

$$dQ = \left(4aT^3V + \frac{3}{2}\frac{N_A k}{\mu}\right)dT + \left(\frac{4}{3}aT^4 + \frac{N_A k}{\mu}\frac{T}{V}\right)dV$$

比较上两个等式可以得到

$$\frac{\Gamma_1(P_r+P_g)-P_g}{4P_r+P_g}=\frac{4P_r+P_g}{12P_r+\frac{3}{2}P_g}$$

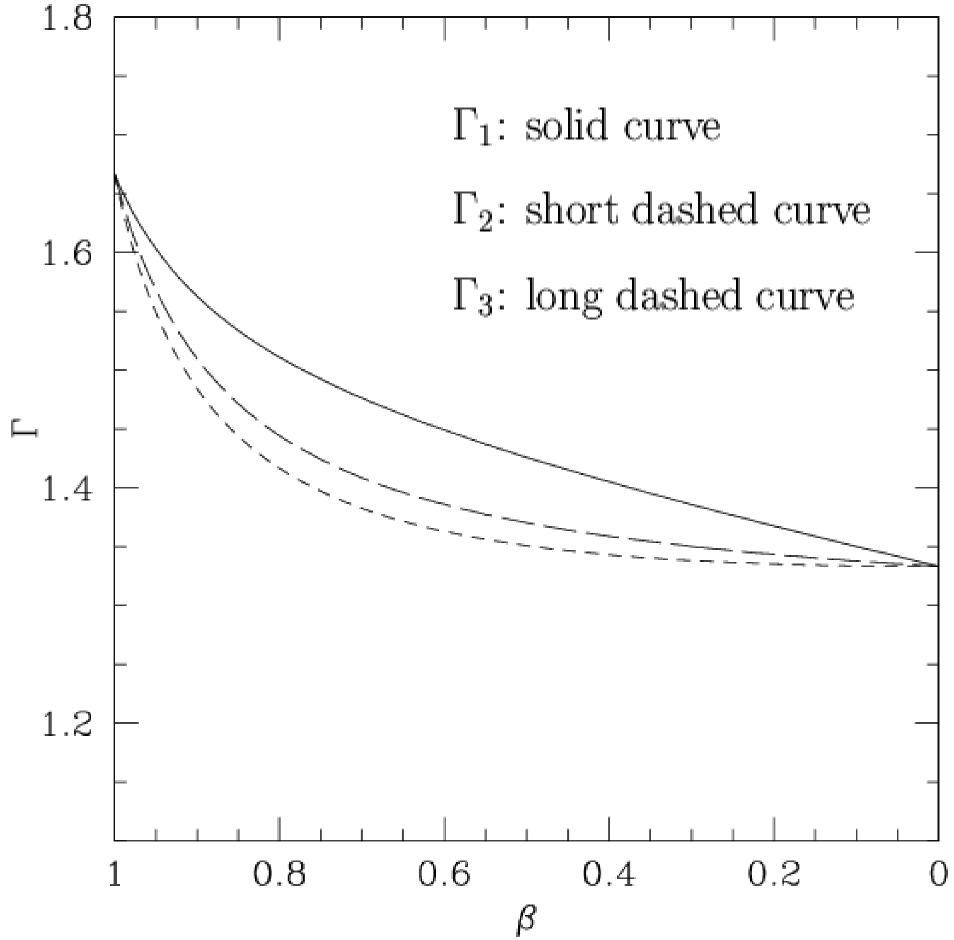
引入一个参数 β 表示气体压在总压强中所占的比例

$$\begin{aligned} P_g &= \beta P \\ P_r &= (1-\beta)P \end{aligned}$$

于是我们可以写出结果

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{32-24\beta-3\beta^2}{24-21\beta} \\ \Gamma_2 &= \frac{32-24\beta-3\beta^2}{24-18\beta-3\beta^2} \\ \Gamma_3 &= \frac{32-27\beta}{24-21\beta} \end{aligned}$$

作业10)：请推导非简并理想气体与辐射场混合系统的绝热指数。并做出随 β 的变化图。



$$\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_S$$

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_S$$

$$\Gamma_3 - 1 = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho}\right)_S$$

All of these decrease monotonically from $5/3$ for $\beta = 1$ to $4/3$ for $\beta = 0$. Since they depend upon the state of the gas, the differential expressions are not immediately integrable as for an ideal gas.

绝热指数的物理意义

$$\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_S$$

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_S$$

$$\Gamma_3 - 1 = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho}\right)_S$$

1）绝热声速v_s

$$v_s^2 = \left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{ad} = \Gamma_1 \frac{P}{\rho}.$$

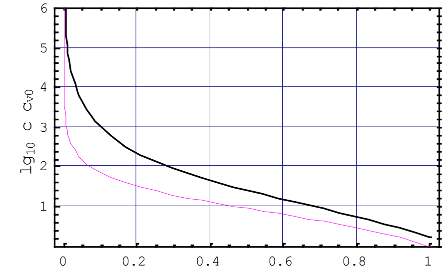
显然Γ_1与动力学过程相关，例如星体的脉动。

2） Γ_2表示温度是如何相对于压力发生变化的，它可以用来判断恒星内部是否出现对流。对定义绝热温度梯度十分有用

$$\frac{1}{\nabla_{ad}} = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_{ad} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1}.$$

3） Γ_3比较直接的描述了温度相对于压缩的反应。

混合系统的比热



非简并理想气体与辐射场混合系统的**定容比热**为

$$
\begin{aligned}
C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V &= 4aT^3V + \frac{3}{2}\frac{N_A k}{\mu} \\
&= \frac{3}{2}\frac{N_A k}{\mu}\left(1 + \frac{8aT^4/3}{N_A k/\mu V}\right) \\
&= c_V\left(1 + \frac{8P_r}{P_g}\right) \\
&= c_V\frac{8-7\beta}{\beta}
\end{aligned}
$$

$$
dQ = \underline{\left(4aT^3V + \frac{3}{2}\frac{N_A k}{\mu}\right) dT} + \left(\frac{4}{3}aT^4 + \frac{N_A k}{\mu}\frac{T}{V}\right) dV
$$

$$
\begin{aligned}
P_g &= \beta P \\
P_r &= (1-\beta)P
\end{aligned}
$$

其中c_V为非简并理想气体的定容比热。

1

$$
\begin{aligned}
dP &= \left(\frac{4}{3}aT^4 + \frac{N_A k}{\mu}\frac{T}{V}\right)\frac{dT}{T} - \frac{N_A k}{\mu}\frac{T}{V}\frac{dV}{V} \\
&= (4P_r + P_g)\frac{dT}{T} - P_g\frac{dV}{V}
\end{aligned}
$$

定压比热为

$$
C_P = c_V\frac{\frac{32}{3} - 8\beta - \beta^2}{\beta^2}
$$

它们的比值为

$$
\frac{C_P}{C_V} = \frac{\Gamma_1}{\beta}
$$

2

$$
\frac{dP}{P} + \Gamma_1\frac{dV}{V} = 0
$$

3. 部分电离气体的热力学

Saha公式

部分电离气体的热力学

- **First Law of Thermodynamics:**

$$dE = TdS - PdV + \mu dN$$

Change in internal energy

Temperature

Pressure

Chemical potential (describes effect of a change in number density, e.g. ionization: $H^1 + e^- \rightarrow H^0 + \gamma$)

Saha公式

在**热平衡状态**下，不同能级的相对粒子数目由Boltzmann分布规律所决定，即

$$\frac{N_2}{N_1}=\frac{g_2}{g_1}e^{-(\mathcal{E}_2-\mathcal{E}_1)/kT} \qquad \Leftarrow \qquad N_i=\frac{N}{U}g_ie^{-\mathcal{E}_i/kT}$$

在此**令**基态的能量为零点，其中ε_i和 g_i分别对应着第 i 个能级的能量和统计权重， N为单位体积内粒子的总数目，而U为配分函数。

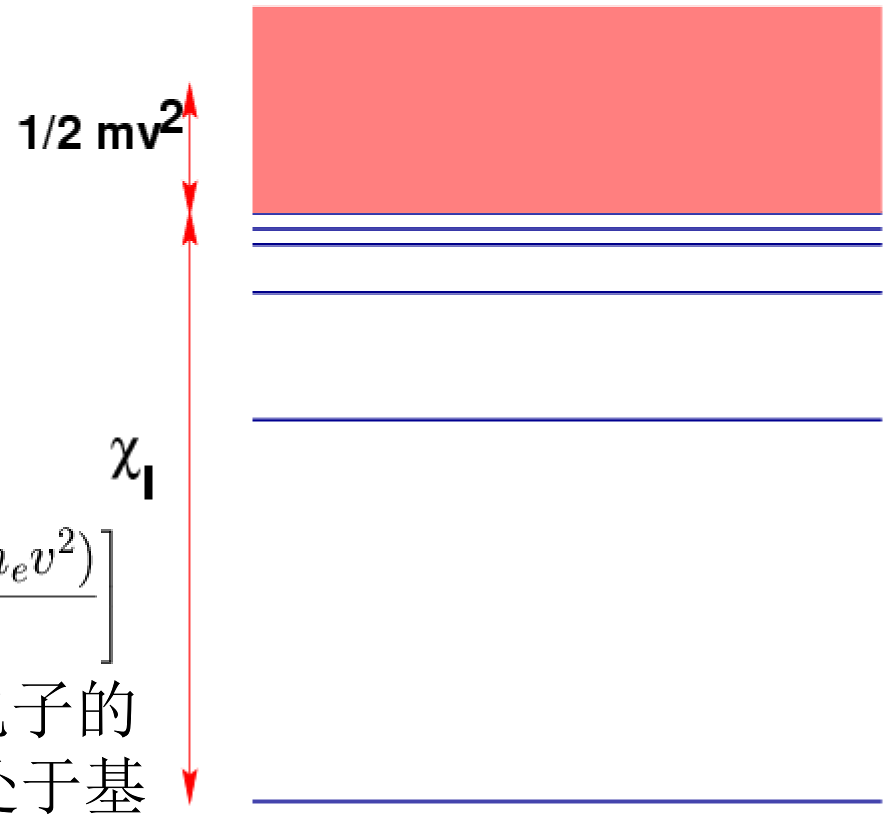
$$N=\sum N_i \qquad\qquad U=\sum g_ie^{-\mathcal{E}_i/kT}$$

显然在低温情况下基态的贡献是主要的，配分函数为基态的统计权重。

Saha公式 给出不同电离阶段的原子数目的分布。

基态离子以及速度为*v*的自由电子与基态中性原子的能量差为

$$\Delta\mathcal{E} = \chi_I + \frac{1}{2}m_e v^2$$



其中x_I为电离势，按照Boltzmann分布规律有

$$\frac{dN_0^+(v)}{N_0} = \frac{g}{g_0}\exp\left[-\frac{(\chi_I + 1/2m_e v^2)}{kT}\right]$$

其中$dN_0^+(v)$是对应自由电子的速度在$v \rightarrow v + dv$间的，处于基态能级上的离子数目。N_0为处于基态能级上原子的数目，g_0为原子在基态的统计权重，g 为离子在基态的统计权重g^+与电子的统计权重g_e的乘积，即

$$g = g_0^+ g_e$$

因为电子具有两个自旋状态，于是

$$g_e = \frac{2dx_1dx_2dx_3dp_1dp_2dp_3}{h^3}$$

其中坐标空间体积$dx_1dx_2dx_3$包含一个电子，于是$dx_1dx_2dx_3 = 1/N_e$，其中N_e为电子的数密度。另假定电子具有各向同性的速度分布，即

$$dp_1dp_2dp_3 = 4\pi m_e^3 v^2 dv$$

代入

$$\frac{dN_0^+(v)}{N_0} = \frac{g}{g_0}\exp\left[-\frac{(\chi_I + 1/2m_ev^2)}{kT}\right]$$

于是有

$$\boxed{\frac{dN_0^+(v)}{N_0} = \frac{8\pi m_e^3}{h^3}\frac{g_0^+}{N_eg_0}\exp\left[-\frac{(\chi_I + 1/2m_ev^2)}{kT}\right]v^2dv}$$

对速度积分可得

$$\boxed{\frac{N_0^+ N_e}{N_0} = \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} \frac{2g_0^+}{g_0} e^{-\chi_I/kT}} \qquad *$$

前面的Boltzmann分布规律给出

$$\frac{N_0}{N} = \frac{g_0}{U(T)}$$

$$\frac{N_0^+}{N^+} = \frac{g_0^+}{U^+(T)}$$

代入*式可得到Saha公式，

$$\boxed{\frac{N^+ N_e}{N} = \frac{2U^+(T)}{U(T)} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\chi_I/kT}}$$

其中 N 和 N^+ 分别为中性原子和一次电离原子的数密度，U 和 U^+ 为相应的配分函数。

将$N \rightarrow N_j$，$N^+ \rightarrow N_{j+1}$，$U \rightarrow U_j$，$U^+ \rightarrow U_{j+1}$，可以给出近邻两个电离原子满足的Saha公式

$$n = \frac{\rho}{m_u \mu}$$

将Saha公式具体运用到纯氢原子气体，$U = 2, U^+ = 1$。并考虑电中性条件， $N_e = N^+$，且总的粒子数密度为$N_T = N + N^+$。并引入**电离度参数** $y = N^+ / N_T$。

Saha方程能被改写为

$$\boxed{\frac{y^2}{1-y} = \frac{1}{n}\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\chi_H/kT}}$$

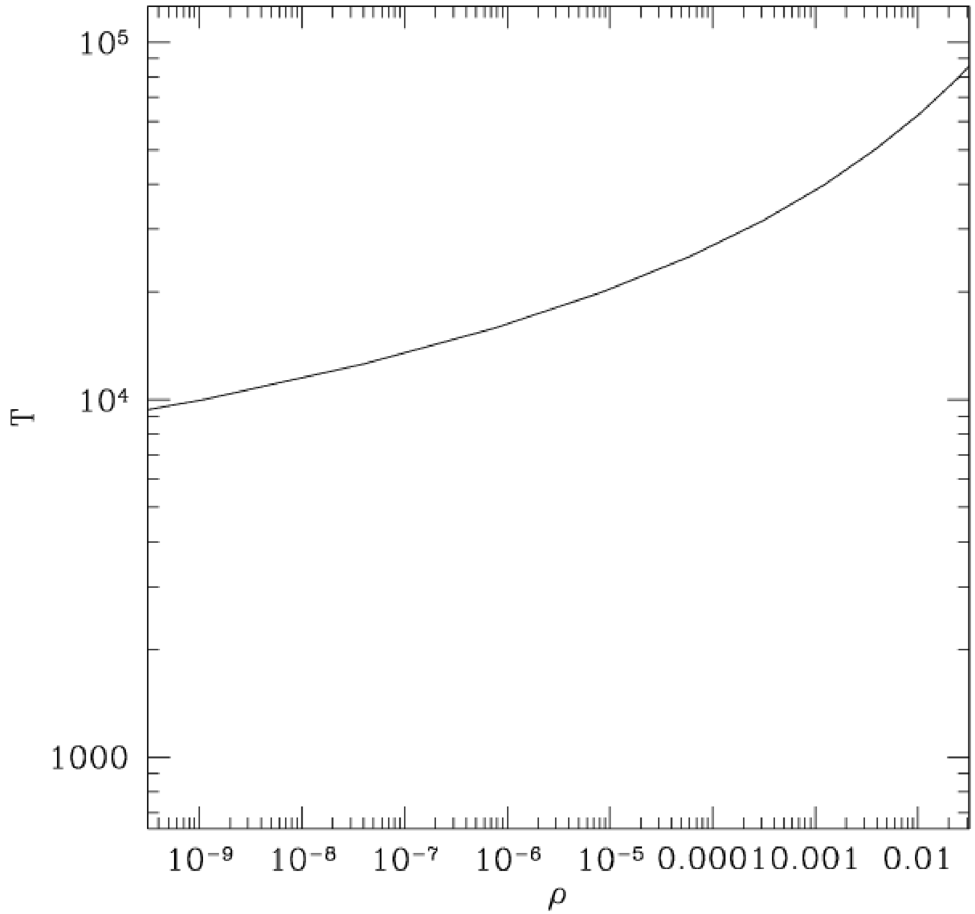
上式中n为总的粒子数密度，显然有

$$T \to \infty, y \to 1$$

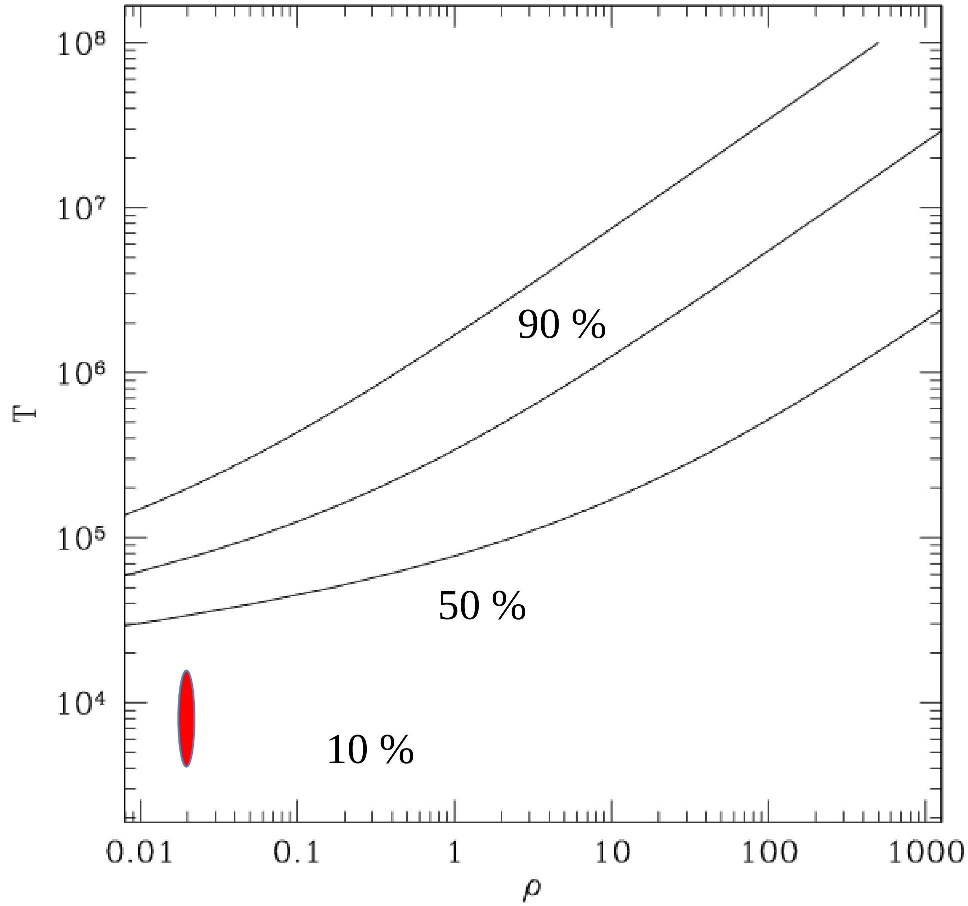
$$T \to 0, y \to 0$$

对于纯氢气体，总的粒子数密度（不含电子）有 $n = \rho / m_u$，于是有

$$\boxed{\frac{y^2}{1-y} = \frac{4 \times 10^{-9}\ \mathrm{g\ cm^{-3}}}{\rho} T^{3/2} e^{-1.578\times 10^5/T}}$$



此图给出了取相同的电离度(y = 0.5)时的T - ρ 曲线。显然在极低密度时，要求的电离温度约为10^4K，且随着密度的增加，温度变化不是很明显。



Saha公式的实用性：

1. 极低密度时，局部热动平衡的条件是否仍然能够成立？
2. 高密度度时，粒子之间存在相互作用需要考虑，如压力电离的贡献。

部分电离气体的热力学

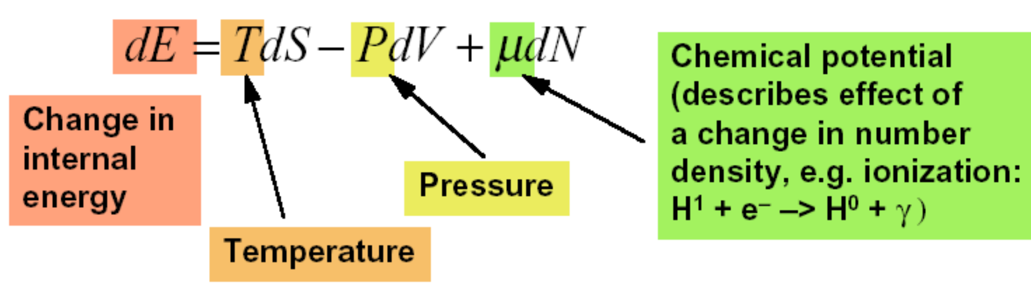
可以想象部分电离气体的热力学与单原子理想气体或完全电离气体的热力学很不一样，原因：

1. 自由粒子的数目不再是常数。

2. 如果需要增加自由粒子的数目，要消耗电离能。

在电离温度附近，Saha公式表明对温度任何一个细微的变化都会导致电离度显著的改变。于是可以想象对于氢原子，在温度$T \sim 10^4$ K附近，相对于单原子理想气体或完全电离气体而言，将会具有更大的比热c_V和c_P。

- **First Law of Thermodynamics:**



以部分电离的纯氢气体为例，令N，H，H^+分别表示单位体积内自由粒子，中性氢原子，电离氢原子的数目。此时，单位质量系统的内能近似为

请自己思考完成氢氦或其它金属混合气体的情况！

$$\boxed{U(T,V) = \frac{3}{2}NkTV + \chi_H H^+ V}$$

电离能

其中$V = 1/\rho$，为比体积。由热力学第一定律，定压比热可以写为

粒子数不再是常数

$$c_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2}NkV + \frac{3}{2}kTV\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_V + \chi_H V\left(\frac{\partial H^+}{\partial T}\right)_V$$

考虑电中性条件$N_e = H^+$，可知总的自由粒子数密度为

$$N = H + H^+ + N_e = H + 2H^+$$

因电子的质量比质子的质量小很多，近似可忽略，于是可以给出比体积与氢原子粒子数之间的关系

$$H^+ + H = \frac{N_A}{V}$$

（$N = \rho N_A$，而$V = 1/\rho$）

$$N = \boxed{H + H^{+}} + N_e = H + 2H^{+}$$

$$N_T$$

于是有

$$\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial H^{+}}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V$$

$$c_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2}NkV + \frac{3}{2}kTV\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_V + \chi_H V\left(\frac{\partial H^{+}}{\partial T}\right)_V$$

于是定容比热可以进一步整理为

$$c_V = \frac{3}{2}NkV\left[1 - \frac{2T}{3N}\left(\frac{3}{2} + \frac{\chi_H}{kT}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V\right]$$

右边第一项对应着为粒子数恒定时的定容比热，第二项表示考虑电离效应后的修正项。显然$(\partial H / \partial T)_V$为负，则第二项为正值。

而氢原子Saha公式有如下的形式。

$$\frac{N^{+}N_e}{N} = \frac{2U^{+}(T)}{U(T)}\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\chi_I/kT}$$

$$\frac{H^{+}N_e}{H} = \frac{(N_A/V - H)^2}{H} = \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\chi_H/kT}$$

$$H^{+} + H = \frac{N_A}{V}$$

由此可以求出偏微分$(\partial H / \partial T)_V$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V = -\frac{1}{T}\left(\frac{3}{2} + \frac{x_H}{kT}\right)\frac{H^{+}H}{H^{+} + 2H}$$

于是可求出定容比热

$$C_v = C_v^{(0)}\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}+\frac{\chi_H}{kT}\right)^2\frac{H^+H}{(H+2H^+)(2H+H^+)}\right]$$

类似可求出定压比热

$$C_p = C_v^{(0)}\left[\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}+\frac{\chi_H}{kT}\right)^2\frac{H^+H}{(H+H^+)^2}\right]$$

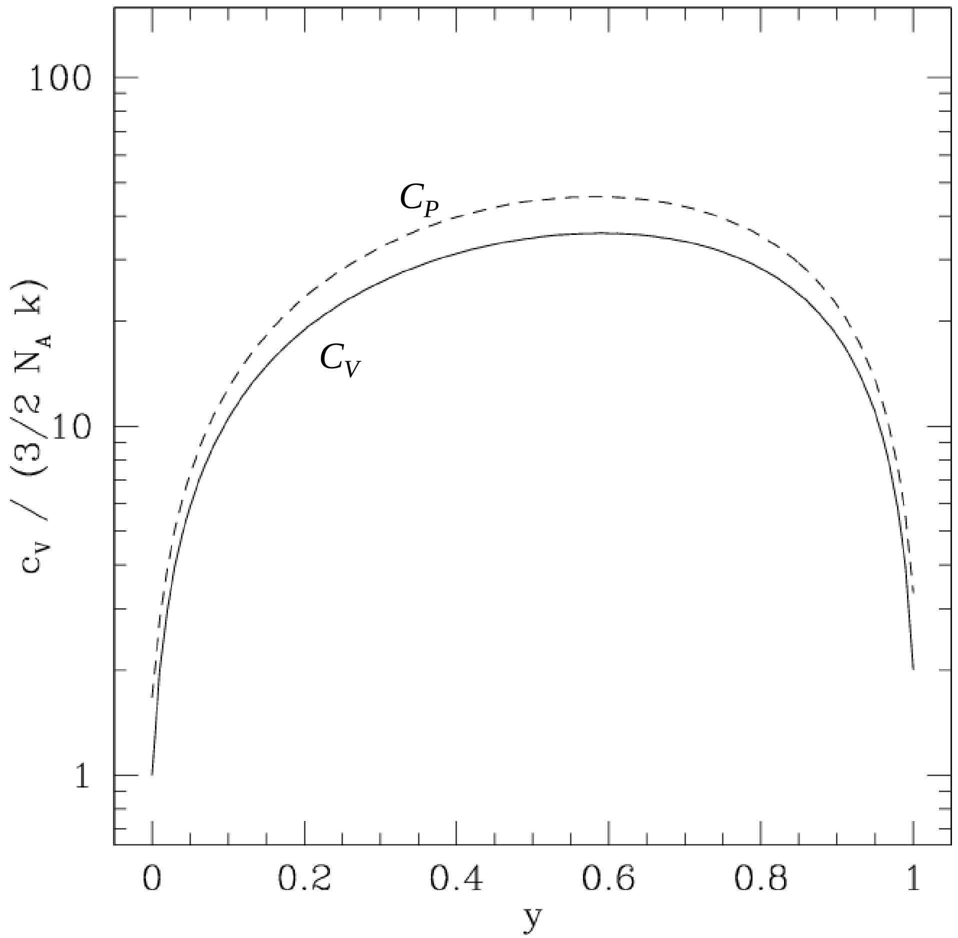
自己推导

其中$C_V^{(0)} = 3NkV/2$为非电离气体的定容比热，引入电离度参数 $y = H^+/(H+H^+)$ 。可做出在给定温度下比热随电离度参数的曲线。

将状态方程

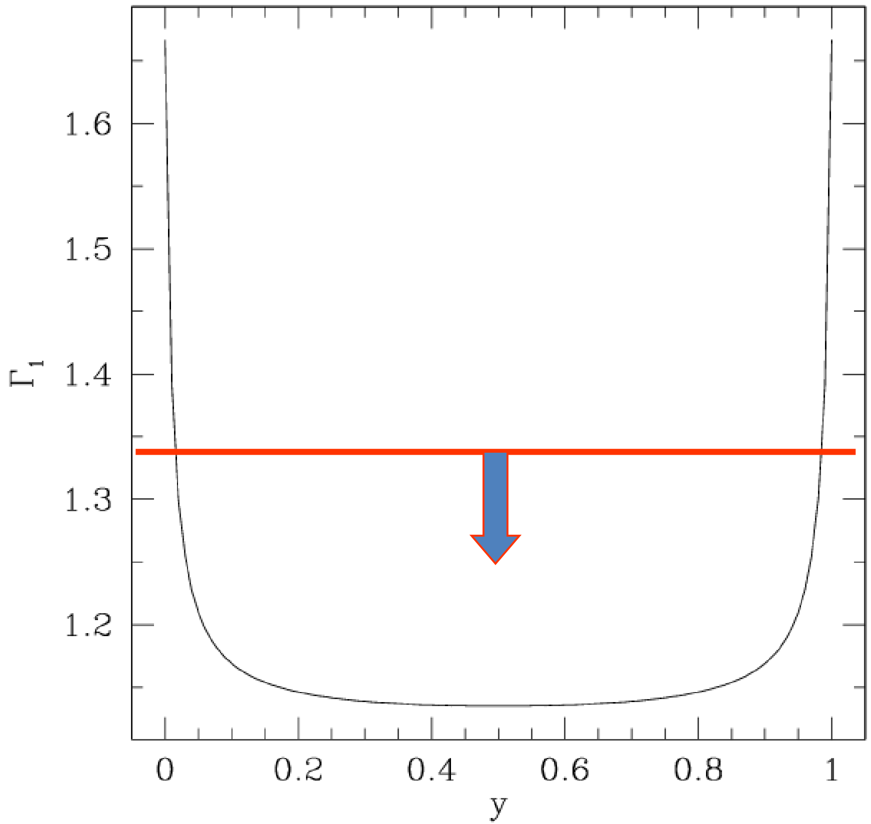
$$PV = \frac{\Re}{\mu}T = NkT$$

代入内能表达式微分表达式即可。



在此令整个电离过程的温度为10^4 K。由图可见①最大比热几乎是中性氢原子定容比热的30倍，②而当$y = 1$，即完全电离时$C_V = 2C_V^{(0)}$。

作业 12): 请求出部分电离气体的绝热指数，$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$，并做出给定温度（$10^4$ K）时绝热指数相对于电离参数y的图形。（请尽量完成，过程稍稍烦，但思路简单）



计算后，你可以发现对部分电离的氢原子，这三种绝热指数将明显地小于4/3。部分电离气体在动力学上是不稳定的 。(稳定性分析具体参见后面的Virial定理）

推导参见Clayton书p.125页。

Table 2-4 Properties of a hydrogen gas near $T = 10^4$ °K

Fraction ionized	Γ_1	Γ_2	Γ_3	$\frac{C_V}{\frac{3}{2}N_0k}$	$\frac{C_P}{\frac{3}{2}N_0k}$
0.00	1.6666	1.6666	1.6666	1.0000	1.6666
0.05	1.2097	1.1593	1.1662	5.8974	7.3037
0.10	1.1688	1.1160	1.1214	10.5264	12.8572
0.15	1.1537	1.1000	1.1049	14.8650	18.2437
0.20	1.1460	1.0920	1.0965	18.8891	23.3797
0.25	1.1415	1.0872	1.0915	22.5716	28.1816
0.30	1.1386	1.0842	1.0884	25.8826	32.5659
0.35	1.1368	1.0822	1.0864	28.7882	36.4492
0.40	1.1356	1.0810	1.0851	31.2503	39.7478
0.45	1.1349	1.0803	1.0844	33.2262	42.3783
0.50	1.1347	1.0801	1.0842	34.6670	44.2572
0.55	1.1349	1.0803	1.0844	35.5176	45.3010
0.60	1.1356	1.0810	1.0851	35.7147	45.4261
0.65	1.1368	1.0822	1.0864	35.1856	44.5490
0.70	1.1386	1.0842	1.0884	33.8465	42.5862
0.75	1.1415	1.0872	1.0915	31.6003	39.4542
0.80	1.1460	1.0920	1.0965	28.3336	35.0695
0.85	1.1537	1.1000	1.1049	23.9133	29.3486
0.90	1.1688	1.1160	1.1214	18.1820	22.2079
0.95	1.2097	1.1593	1.1662	10.9524	13.5640
1.00	1.6666	1.6666	1.6666	2.0000	3.3333

§2.3 Virial定理

恒星结构方程是微分方程，显然是对局部进行的，而Virial定理是对有关恒星整体性质的描述，在解释恒星演化时非常有用。

简单的推导方式

假定一静态的恒星不存在整体运动（如旋转，湍动），则在其内部应满足流体静平衡的要求

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\rho\frac{Gm}{r^2}}$$

由此构造整体量

$\boxed{dm(r)/dr = 4\pi r^2\rho}$

两边同乘 $V(r)\,dr = 4/3\,\rho\ r^3\,dr$，有

$$VdP = -\frac{4}{3}\pi r^2\rho dr\frac{Gm}{r} = -\frac{1}{3}\frac{Gm}{r}dm$$

$$\boxed{VdP = -\frac{4}{3}\pi r^2 \rho dr \frac{Gm}{r} = -\frac{1}{3}\frac{Gm}{r}dm}$$

对整个恒星进行积分，左式有 $\int VdP = PV|_0^R - \int PdV$

显然在中心处($r = 0$)，$V = 0$；在外边界处($r = R$)，$P_S = 0$（也可令不为零）。而右式可以看作恒星的自引力束缚能

$$d\Omega = -\frac{Gm}{r}dm \qquad \Omega = -\int \frac{Gm}{r}dm$$

于是有结论

$$\boxed{\Omega + 3\int PdV = 0}$$

Virial定理这种形式与恒星内部粒子性质无关，仅取决于γ。

Virial 定理

$$P = \frac{\Re}{\mu}\rho T, \qquad \frac{\Re}{\mu} = c_p - c_V = (\gamma - 1)c_V$$

$$P = (\gamma - 1)c_V \cdot \rho T$$

$$\gamma = {c_P}/{c_V} \qquad c_V = \frac{f}{2}\Re T$$

理想气体单位体积内能: $$u = \rho c_V T$$

→状态方程，$P = (\gamma - 1)u$，

γ为常数代入上面的积分可得到 **$\Omega + 3(\gamma - 1)U = 0$** ，

其中U为整个恒星的内能。

Virial定理这种形式与恒星内部粒子性质无关，仅取决于γ 。

星体的自引力位能和位力定理的另一种表述

讨论一个处于流体静力学平衡的气体球（恒星）.

在以r为半径的球体内物质的质量为

$$M(r) = \int_o^r \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

在r→r+dr范围内有一团微小质元dm, 星体对它的引力作用方向指向星体中心，其大小为

$$\overrightarrow{F_G} = -\frac{GM(r)dm}{r^3}\vec{r}$$

通常计算恒星自引力位能的方法: 设想恒星所有物质从∞处弥漫状态引力收缩聚集到现在的半径为R的球体，**引力所作总功的负值就是恒星的自引力势能** 。

我们先计算如下问题：当一部分物质已聚集到半径为r的球体（其质量为M（r））时，它的引力将质元dm从无穷远处吸引到该球体表面的过程中，它的引力所作的功为

$$dA(r) = \int_{+\infty}^r \vec{F}_G . d\vec{r}_1 = \frac{GM(r)}{r} dm$$

$$d\Omega = -dA(r) = -\frac{GM(r)}{r}dm$$

因此, r→r+dr的球壳物质的引力位能为:

$$d\Omega = -\frac{GM(r)}{r}\rho(r)4\pi r^2 dr = -\frac{GM(r)dM(r)}{r}$$

$$\Omega = -\int_0^R \frac{GM(r)}{r}dM(r)$$ **其中Ω为整个恒星引力位能。**

对于内部密度分布均匀（ρ =常数）的恒星模型， $r = (\frac{3}{4\pi\rho})^{1/3} M^{1/3}$

$$\Omega = -\frac{3}{5}Gm^2 / R$$ **(*m*为恒星的总质量)**

一般来说，星体的自引力势能大致量级为

$$\boldsymbol{\Omega \approx -\alpha \frac{Gm^2}{R}}$$ $(\alpha \sim O(1))$

2. 恒星的总能量

$\Omega + 3(\Gamma - 1)U = 0$

恒星的总能量为

$$W = U + \Omega$$

由Virial定理不难得到

$$W = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}\Omega = -(3\gamma - 4)U$$

1. 如果Γ > 4/3 则由Ω < 0，*W* < 0。则自引力系统动力学是稳定的。（理想气体Γ = 5/3， 光子气体Γ = 5/3 ）

2. 当天体自引力收缩时，则自引力做功，即

$$\dot{\Omega} < 0, \quad \dot{U} > 0 \quad \dot{W} < 0$$

这说明释放的自引力能一部分增加系统的内能（升温），另一部分则应该辐射出去了（对理想气体有一半的能量辐射出去了）。

请同学分析！

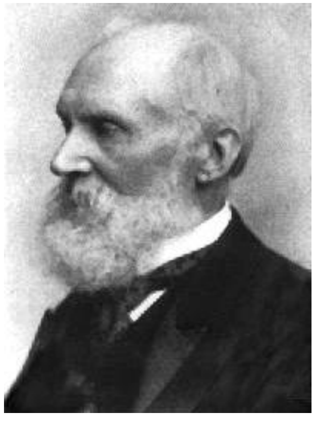
这也是人们最早认识的一种恒星产能方式。实际上恒星内部热核聚变反应的点火温度与此有关。

引力收缩 (Kelvin and Helmholtz)：

辐射→压力↘→收缩→温度↗→辐射

1854年Helmholtz提出的星体引力收缩作为维持恒星辐射的一种能源。

- 不是主序星的重要能源
- 核心尚未发生大规模热核反应之前，引力收缩是原始恒星的主要能源



Lord Kelvin (1824-1907)

H. von Helmholtz(1821-1894).

James Jeans favored the theory that the energy was the result of contraction.

热力学稳定性(Viril定理推论)判据

$P = K\rho^{\Gamma}$　(Γ 一般为推广的绝热指数)

$\Gamma > 4/3$　系统稳定

$\Gamma < 4/3$　系统不稳定

$\Gamma = 4/3$　临界状态（牛顿引力论）

$\Gamma = 4/3$　不稳定（广义相对引力论）

部分电离(H, He)气体，当电离度在 (5 – 95)%之间情形下，

Γ 可以变得远小于4/3, 部分电离气体系统比热可以比完全中性(或完全电离)气体系统的比热高15-20倍。

§ 1.4恒星演化时标

动力学时标

（ *Dynamical or Free fall time-scale* ）

如果恒星的内部压力突然消失，在自引力作用下恒星坍缩的时间。恒星外层塌缩的速度近似取恒星表面的逃逸速度

$$v^2 \sim \frac{GM}{R}$$

于是动力学时标为

$$t_{\rm dyn} \sim \frac{R}{v} \sim \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \sim \frac{1}{[G < \rho >]^{1/2}}$$

其中< ρ >为恒星的平均密度。对于太阳大约是1600 s左右。此时标常用于判断流体静力学平衡条件是否能够成立。

核反应时标

（*Nuclear time-scale*）

Reasonable estimate of the main-sequence lifetime of the star.

因消耗掉核心区域核反应燃料而离开主序阶段的时间

$$t_{\rm nuc} = \frac{\epsilon q_{SC} M c^2}{L}$$

其中 ε 为H → He的产能效率 ~ 0.7 %。q_{SC}为能够提供核反应的燃料在恒星总质量中所占的比例 ~ 10 %。质光关系近似为

$$\frac{L}{L_\odot} \approx \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3.5}$$

于是可给出核反应的时标

$$t_{\rm nuc} \sim 10^{10} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2.5} \ \ {\rm yr}$$

显然恒星的质量越大，在主序阶段的寿命越短。

热时标

(Thermal or Kelvin-Helmholtz time-scale)

恒星辐射掉自身热能（引力能）所需时间

$$t_{\mathrm{KH}} \approx \frac{GM^2}{RL} \sim 3 \times 10^7 \ \mathrm{yr}$$

有时除以2

它也是恒星通过电磁辐射走能量，对内部热力学结构进行整体调节的时标。只有当$t_{KH} \sim t_{nuc}$时，才能够确保恒星能够处于机械平衡和热平衡的状态。

热时标确定了在核聚变反应开始前的恒星如何地快速收缩的时标，即粗略地估计恒星在主序前的寿命

§3.恒星结构的多层球理论

- 恒星结构基本方程组
- 状态方程
- 多层球的基本方程
- 多层球的物理性质
- 点燃核燃烧条件与点燃核燃烧的恒星质量下限
- 电子简并压强在星体热核演化的重要作用
- 耀星和氦闪
- 恒星内部的平稳核燃烧
- 爆炸性核燃烧条件

§3.1恒星结构基本方程组:

$$\frac{dP}{dr}=-\frac{Gm_{(r)}}{r^2}\rho$$ 静力学平衡方程

P 压强; ρ密度; m(r) 质量; T 温度; L 光度

$$\frac{dm(r)}{dr}=4\pi r^2\rho$$ 质量方程

G 引力常数, a 辐射常数, C 光速

$$\frac{dL(r)}{dr}=4\pi r^2\rho(r)\varepsilon(r)$$ 光度方程

温度梯度方程: $$-\frac{dT}{dr}=\frac{3\kappa\rho}{4acT^3}\cdot\frac{L(r)}{4\pi r^2}$$ (辐射传能区)

$$\left|\frac{dT}{dr}\right|=\left|\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad}\right|=\frac{\Gamma_2-1}{\Gamma_2}\frac{T}{P}\left|\frac{dP}{dr}\right|$$ (对流传能区) Γ_2绝热指数

(1克物质)产能率 $$\varepsilon=\varepsilon_0\rho^{\mu}T^{\nu} \qquad \mu=1,2 \qquad \nu>>1$$

ε_0 :化学成分的函数

不透明度((1克)物质对辐射能的平均吸收系数) κ ; 例: 自由-自由吸收:

$$<\kappa_{ff}>=7.53\times10^{22}\frac{\rho}{\mu_e T^{3.5}}.\bar{g}_{ff}(X+Y+6Z) \qquad cm^2/g$$

状态方程 续

$$P = K\rho^{\gamma} = K\rho^{1+\frac{1}{n}} \qquad n = \frac{1}{\gamma - 1}$$

γ 多方指数；***n*** 多方指标

四个微分方程 + 状态方程 ⇨ **5个因变量:*P*(*r*), *ρ*(*r*), *m* (*r*), *L* (*r*), *T*(*r*)**

方程封闭。边界条件:

1)中心(自然)边界条件: ***m*(r=0) = 0; *L*(r=0) =0**

2)表面边界条件: ***T*(R) = T_{eff} ; *P*(*R*) =**光球层底部压强

在给定各个参数情形下，数值计算恒星的结构与演化。

稳定辐射平衡

$$\bar{\varepsilon}(r) = \frac{L(r)}{m(r)} \overset{<}{>} \frac{16\pi c G}{3\kappa}\left(1 - \frac{1}{\Gamma_2}\right)\frac{T^4}{P}$$

不稳定, 出现对流

状态方程

$$P = K\rho^{\gamma} = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$$

经典理想气体

$$P_e^{(MB)} = n_e kT = \frac{N_A k}{\mu_e}\rho T$$

μ_e 电子平均分子量

非相对论强简并电子气体压强

$$P_{e,NR}^{(DG)} = \frac{h^2}{20m_e}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} n_e^{5/3} = 1.0\times10^{13}\left(\rho/\mu_e\right)^{5/3} \qquad \gamma = 5/3$$

相对论强简并电子气体压强

$$P_{e,R}^{(DG)} = 1.24\times10^{15}\left(\rho/\mu_e\right)^{4/3} \qquad \gamma = 4/3$$

电子简并条件: $P_{NR}^{(DG)} > P^{(MB)}$

$$\rightarrow \quad \rho_4 > 2.4T_8^{3/2} \qquad \rho_4 = \rho/(10^4\, g/cm^3) \qquad T_8 = T/10^8\, K$$

热力学稳定性问题(Viril定理推论)

$P = K\ \rho^{\Gamma}$ (Γ 一般为推广的绝热指数)

$\Gamma > 4/3$ 系统稳定

$\Gamma < 4/3$ 系统不稳定

$\Gamma = 4/3$ 临界状态（牛顿引力论）

$\Gamma = 4/3$ 不稳定（广义相对引力论）

部分电离(H, He)气体，当电离度在 (5 – 95)%之间情形下,

Γ 可以变得远小于4/3,部分电离气体系统的比热可以比完全中性(或完全电离)气体系统的比热高15-20倍。

恒星的多层球模型

多层球的基本方程

由 $$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm_{(r)}}{r^2}\rho$$ $$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$ 合并为 $$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho.$$

结合状态方程 $$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$$

$$r = \alpha\xi, \qquad \rho = \rho_c \vartheta^n$$

再作变数变换(同时将方程无量纲化):

$$\alpha = [\frac{(n+1)K}{4\pi G}]^{1/2}\rho_c^{(1-n)/2n}$$

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\vartheta}{d\xi}\right) = -\vartheta^n$$ **Lane-Emden 方程**

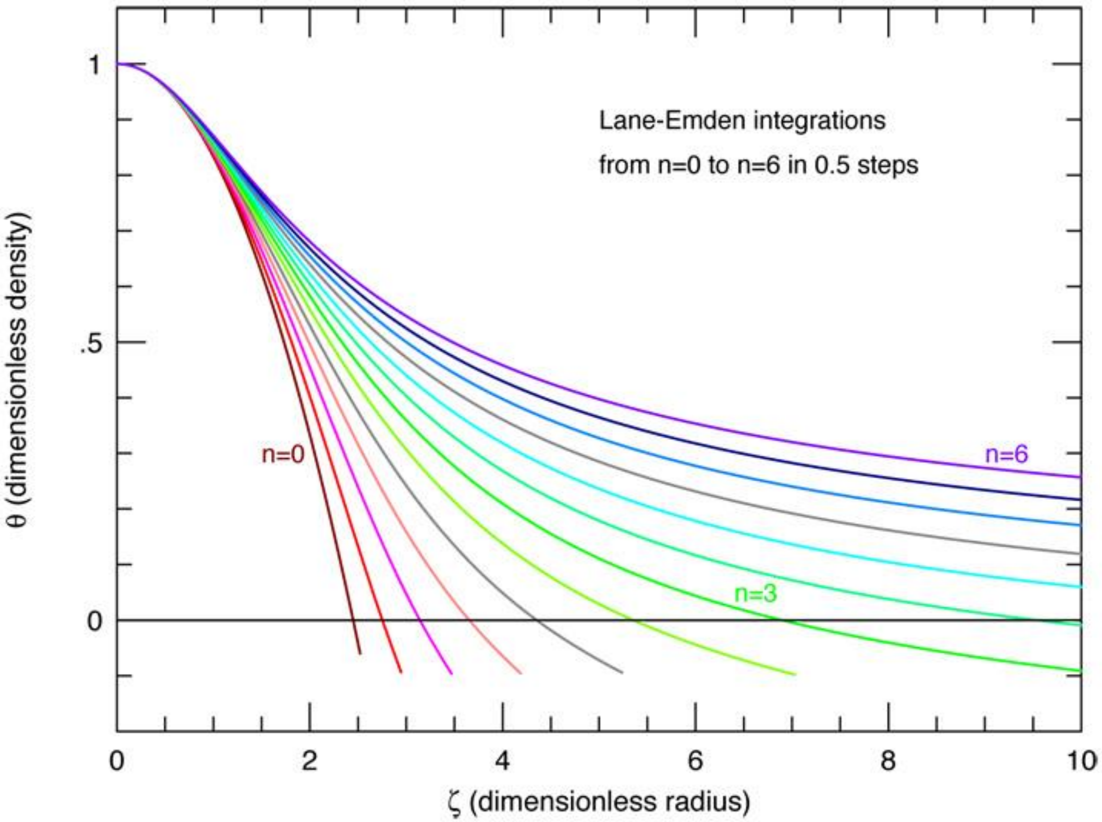
$$\vartheta(0) = 1, \qquad \left|\frac{d\vartheta}{d\xi}\right|_{\xi=0} = 0$$ **(边界条件)**

当状态方程确定后，已知多方指标**n**, 就决定了**Emden**函数 $\vartheta_n(\xi)$

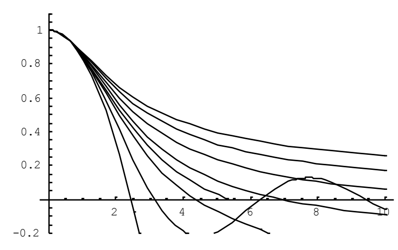
Lane-Emden函数有关常数值

n	ξ_1	$-\xi_1^2\left(\frac{d\vartheta_n(\xi)}{d\xi}\right)_{\xi_1}$	$\rho_c / \bar{\rho}$	注
0	**2.4494**	**4.8988**	**1.0000**	均匀分布模型
0.5	**2.7528**	**3.7871**	**1.8361**	
1.0	**3.14159**	**3.14159**	**3.28987**	
1.5	**3.65375**	**2.71406**	**5.99071**	**Γ =5/3**
3.0	**6.89685**	**2.01824**	**54.1825**	**Γ =4/3** （牛顿临界稳定）
4.0	14.97155	1.79723	622.408	
5.0	∞	1.73205	∞	物质无限地向中心聚集半径向外无限延伸

- 数值解




```
In[8]:= NDSolve[
  Evaluate[
   {1/ξ^2 ∂ξ (ξ^2 ∂ξ θ[ξ]) + θ[ξ]^η == 0,
     θ[0] == 1, θ'[0] == 1} /. η → 2],
  θ[ξ], {ξ, 0, 5}]
```



Lane-Emden方程

$$\boxed{\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n}$$

$$\rho = \lambda\theta^n$$

$$r = r_n\xi$$

$$r_n = \left[\frac{(n+1)K\lambda^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G}\right]^{1/2}$$

$$\theta(\xi=0) = 1, \quad \frac{d\theta}{d\xi}(\xi=0) = 0$$

$$\theta(\xi_1) = 0 \quad \text{at}\ \xi = \xi_1$$

η	ξ_1	$-\xi_1^2\left(\frac{d(\theta_\eta)}{d(\xi)}\right)_{\xi=\xi_1}$
0.0	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}$
0.5	2.7528	3.7871
1.0	π	π
1.5	3.65375	2.71406
2.0	4.35287	2.41105
2.5	5.35528	2.18720
3.0	6.89685	2.01824
3.25	8.01894	1.94980
3.5	9.53581	1.89056
4.0	14.97155	1.79723
4.5	31.83646	1.73780
4.9	169.47	1.7355
5.0	∞	$\sqrt{3}$

Lane-Emden方程的数值结果

Lane-Emden方程

$$\boxed{\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)=-\theta^n}$$

$$\rho=\lambda\theta^n$$

$$r=r_n\xi$$

$$r_n=\left[\frac{(n+1)K\lambda^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G}\right]^{1/2}$$

$$\theta(\xi=0)=1,\quad \frac{d\theta}{d\xi}(\xi=0)=0$$

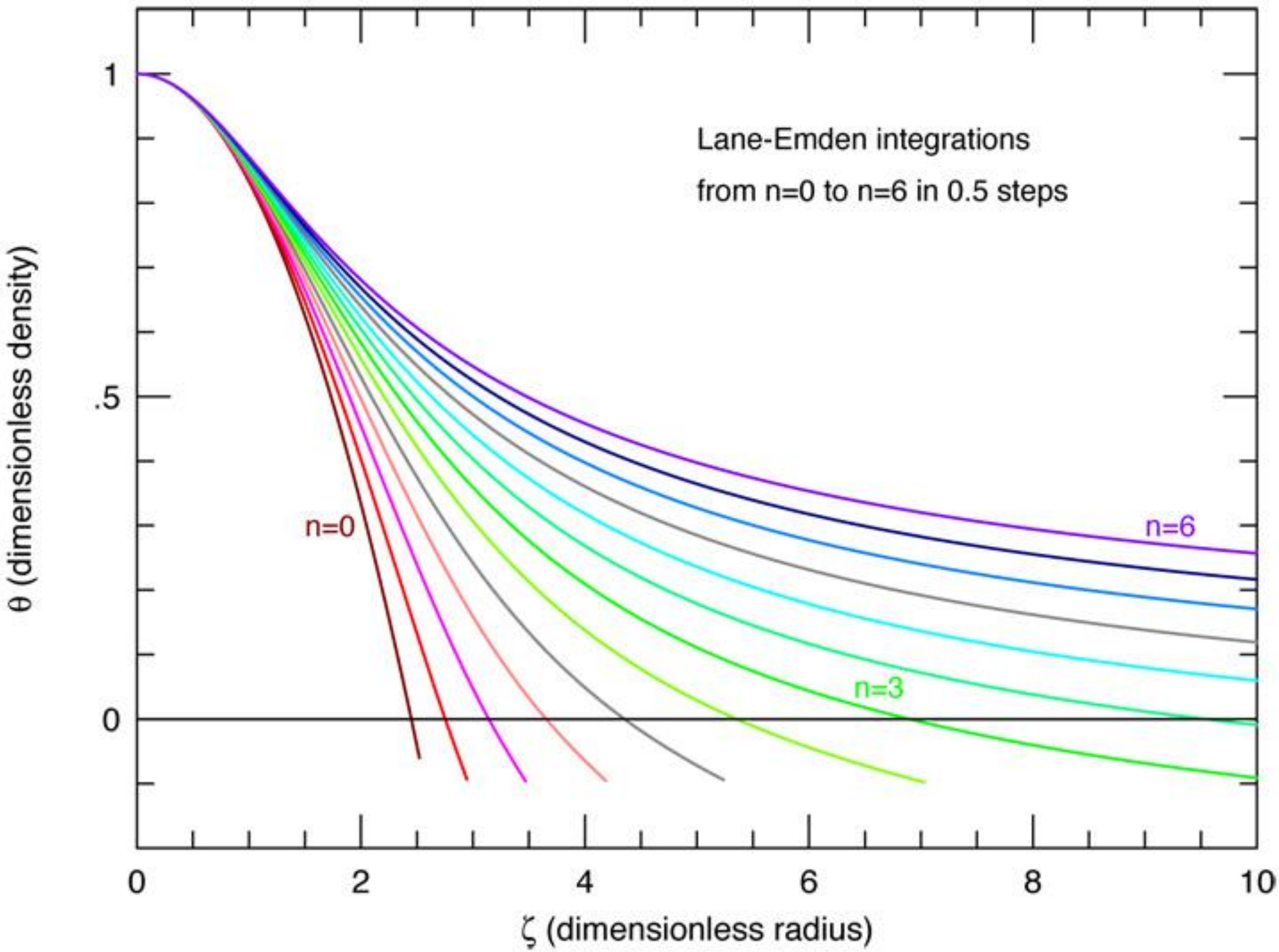
$$\theta(\xi_1)=0\quad \text{at}\ \xi=\xi_1$$

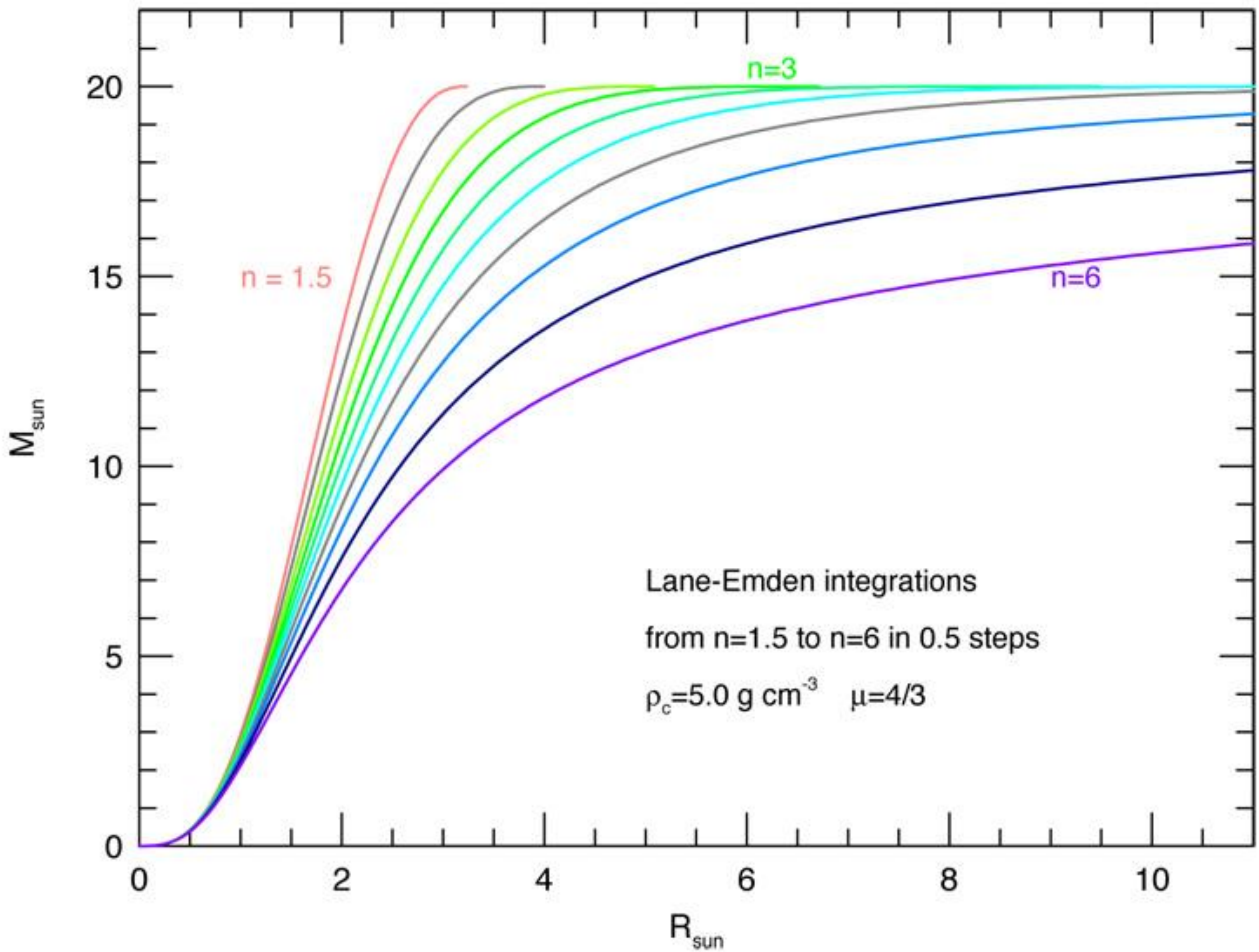
$$\bar{\rho}=3M/(4\pi R^3)$$

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_c}=\left(-\frac{3}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}$$

$$P=K\rho^{1+\frac{1}{n}}=K\lambda^{1+\frac{1}{n}}\theta^{n+1}$$

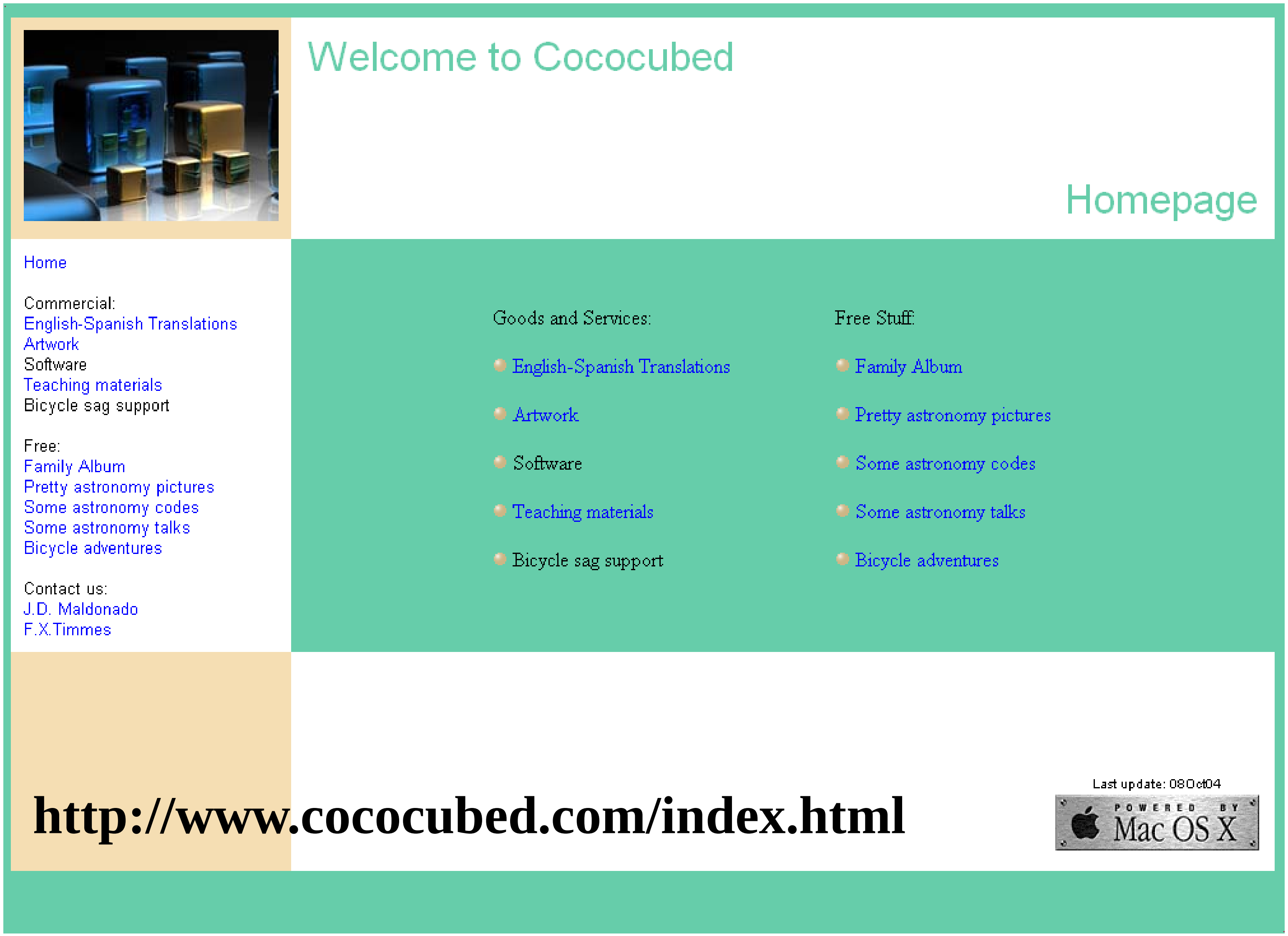
n	ξ_1	$\left(-\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}$	$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}}$
0	2.45	4.90	1.00
1	3.14	3.14	3.29
1.5	3.65	2.71	5.99
2	4.35	2.41	11.4
3	6.90	2.02	54.2
4	15.0	1.80	622.4


Lane-Emden integrations
from n=0 to n=6 in 0.5 steps
n=0
n=3
n=6
1
.5
0
0
2
4
6
8
10
θ (dimensionless density)
ζ (dimensionless radius)



n=3
n = 1.5
n=6
Lane-Emden integrations
from n=1.5 to n=6 in 0.5 steps
ρc=5.0 g cm-3 μ=4/3
Msun
Rsun
0
5
10
15
20
0
2
4
6
8
10

很有用的一个网站



http://www.cococubed.com/index.html

请你试探运算
其中的程序

Here are some fortran codes, some more complicated than others.

- Stellar equation of states
- Equation of state with ionization
- EOS for core collapse supernovae
- Stellar atmospheres
- Polytropic stars
- Cold white dwarfs
- Cold neutron stars
- Stellar opacities/conductivities
- Neutrino energy loss rates
- Ephemeris routines
- Fermi-Dirac functions
- Nuclear reaction networks
- Nuclear statistical equilibrium
- Laminar deflagrations
- Chapman-Jouget detonations
- ZND detonations
- Exact Riemann solutions
- Fitting data to conic sections
- An unusual linear equation solver
- Supernova light curves
- Galactic chemical evolution
- The FLASH code

You should, at minimum, cite the relevant references if you publish a piece of work that uses these codes, pieces of these codes, or modified versions of them. If you're reasonable, you should offer co-authorship of the publication. At best, you'll love these programs so much that you'll send great wodges of cash to me.

http://www.cococubed.com/code_pages/codes.shtml

Here are some fortran codes; some more complicated than others.

- Stellar equation of states
- Equation of state with ionization
- EOS for core collapse supernovae
- Stellar atmospheres
- Polytropic stars
- Cold white dwarfs
- Cold neutron stars
- Stellar opacities/conductivities
- Neutrino energy loss rates
- Ephemeris routines
- Fermi-Dirac functions
- Galactic chemical evolution
- Verification Problems
- Nuclear reaction networks
- Nuclear statistical equilibrium
- Laminar deflagrations
- Chapman-Jouget detonations
- ZND detonations
- Fitting data to conic sections
- An unusual linear equation solver
- A Pentadiagonal solver
- Quadratics, Cubics & Quartics
- Supernova light curves
- Exact Riemann solutions
- 1D PPM hydrodynamics
- The FLASH code
- Paxton's EZ stellar evolution code

Last update: 25Sep05

多层球的物理性质

Emden 函数的第1个零点对应于恒星外边界(半径)位置 $\vartheta_n(\xi_1)=0$

恒星半径 $R=\alpha\xi_1$ $$\alpha=[\frac{(n+1)K}{4\pi G}]^{1/2}\rho_c^{(1-n)/2n}$$

恒星质量 $$m_{(\xi)}=4\pi\alpha^3\rho_c\left(-\xi^2\frac{d\vartheta_n}{d\xi}\right) \quad (\Leftarrow \quad m(r)=\int_0^r 4\pi r^2\rho(r)dr \quad)$$

$$M=4\pi\left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right]^{3/2}\rho_c^{(3-n)/2n}\left(-\xi^2\frac{d\vartheta_n}{d\xi}\right)_{\xi_1}$$

极端相对论性电子简并系统(大质量白矮星)**: *n* = 3**

极大质量(Chandrasekhar 极限质量)

$$M_{ch}=5.80\mu_e^{-2}M_{Sun}=5.80Y_e^2M_{Sun}$$
$$=1.45(Y_e/0.5)^2M_{Sun}$$

单原子理想气体和辐射场混合系统

辐射压的重要性

$$P = K\rho^{4/3} \qquad K = \left[\left(\frac{N_A k}{\mu}\right)^4 \frac{3}{a}\frac{1-\beta}{\beta^4}\right]^{1/3}$$

$$\begin{cases} \beta = P_g / P & (a\text{为辐射常数}) \\ 1-\beta = P_r / P & (\text{它随星体质量增加而增加}) \end{cases}$$

星体的质量愈大，辐射压所占的比例(1 – β)愈大，气体压强比例(β)愈小，比例常数K值愈大。由理想气体和辐射组成的混合气体并不能完全看为Γ = 4/3 的多层球。

Eddington的标准模型：**n=3**，在恒星内部 **β=P$_g$/P =const.**

→

$$\frac{M}{M_\Theta} = 18.0\frac{\sqrt{1-\beta}}{(\mu\beta)^2}$$

低质量恒星，（**1-β**）非常小

$$(1-\beta) \approx 1\times 10^{-3}(M/M_\Theta)^2$$

对于质量非常大的恒星，辐射压强远远超过气体压强，δ”0

$$\mu\beta = 0.42(M/100M_\Theta)^{-1/2}$$

大质量恒星的结构(*Eddington standard model* $n = 3$)

我们得考虑辐射压的贡献。总的压强为

$$P = \frac{R}{\mu}\rho T + \frac{1}{3}aT^4 = \frac{R}{\mu\beta}\rho T$$

其中 β表示理想气体的压强在总的压强中所占比例，即

$$1 - \beta = \frac{P_r}{P} = \frac{aT^4}{3P}$$

如果 β为常数则$T^4 \propto P$，带回状态方程有

$$P = \left(\frac{k}{\mu m_u}\right)^{4/3}\left[\frac{3(1-\beta)}{a\beta^4}\right]^{1/3}\rho^{4/3} = \boxed{\left(\frac{3R^4}{a\mu^4}\right)^{1/3}\frac{(1-\beta)^{1/3}}{\beta^{4/3}}}\rho^{4/3}$$

对于恒定的β，则$\Gamma = 4/3$，多方指数 $n = 1/(\Gamma-1) = 3$。

$$P = \underline{K}\rho^{1+\frac{1}{n}} = K\lambda^{1+\frac{1}{n}}\theta^{n+1}$$

于是

$$K=\left(\frac{3R^4}{a\mu^4}\right)^{1/3}\left(\frac{1-\beta}{\beta^4}\right)^{1/3}$$

而对于多方指数$n = 3$，有

$$K=\pi G\rho_c^{2/3}\frac{R^2}{\xi_1^2}$$

而中心密度

$$\rho_c=54.2\bar{\rho}=54.2\frac{3M}{4\pi R^3}$$

代入数值结果有

$$\frac{1-\beta}{\mu^4\beta^4}=3.02\times10^{-3}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2$$

- 在$0 < \beta < 1$范围内，等式左边为单调递减的函数。
- 这意味着$M\uparrow$，$\beta\downarrow$，大质量恒星以辐射压为主。

Lane-Emden方程的数值结果

n	ξ_1	$\left(-\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}$	$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}}$
0	2.45	4.90	1.00
1	3.14	3.14	3.29
1.5	3.65	2.71	5.99
2	4.35	2.41	11.4
3	6.90	2.02	54.2
4	15.0	1.80	622.4

Lane-Emden方程

$$\boxed{\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)=-\theta^n}$$

$$\rho=\lambda\theta^n$$

$$r=r_n\xi$$

$$r_n=\left[\frac{(n+1)K\lambda^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G}\right]^{1/2}$$

$$\theta(\xi=0)=1,\quad \frac{d\theta}{d\xi}(\xi=0)=0$$

$$\theta(\xi_1)=0\quad \text{at}\ \xi=\xi_1$$

$$\bar{\rho}=3M/(4\pi R^3)$$

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_c}=\left(-\frac{3}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}$$

$$P=K\rho^{1+\frac{1}{n}}=K\lambda^{1+\frac{1}{n}}\theta^{n+1}$$

物质平均密度与中心压强

物质平均密度 $$\bar{\rho}/\rho_c = \frac{3}{\xi_1}\left(\frac{d\vartheta_n}{d\xi}\right)_{\xi_1}$$ (与K无关)

$$\rho_c = \left(\frac{\rho_c}{\bar{\rho}}\right)\cdot\frac{3M}{4\pi R^3}$$ $$R \propto M^{2/3}$$ (对上半主序星（质量较大）)

$$\rho_c = \rho_{\Theta,c}\left(\frac{M}{M_\Theta}\right)^{-1}$$ $$\bar{\rho} \approx 1.4\left(\frac{M}{M_\Theta}\right)^{-1} g/cm^3$$

对（小质量）下半主序星，类似规律

通常的主序星，质量愈大的恒星, 中心密度愈低。

中心压强:

$$P_c = W_n\, GM^2/R^4, \quad \left(W_n = \left[4\pi(n+1)\left(\frac{d\vartheta_n}{d\xi}\right)^2_{\xi_1}\right]^{-1} \right)$$

$$= 1.24\times10^{17}\left(\frac{M}{M_\Theta}\right)^2\left(\frac{R}{R_\Theta}\right)^{-4} \quad 达因/厘米^2$$

恒星的中心温度

对于理想的完全电离非退化气体和辐射场的混合体系，中心温度

$$T_c = \left(\frac{\mu\beta}{N_A k} \frac{P}{\rho} \right)_c = \frac{(\mu\beta)_c}{(n+1)N_A k} \left(-\xi \frac{d\vartheta_n}{d\xi} \right)_{\xi_1} \cdot GM/R.$$

对上半主序星（质量较大） $R \propto M^{2/3}$

$$T_c \propto \frac{1}{\mu} M^{1/3}$$

如果取对化学成分：**X=0.5, Y≈0.5, μ～0.7**

$$T_c = 1.4 \times 10^7 \left(\frac{M}{M_\Theta}\right)^{1/3} K \quad \text{(对上半主序星)}$$

对下半主序(小质量)恒星，类似规律。

恒星的中心温度与中心密度

恒星的中心温度则是由恒星整体的宏观性质决定的。一般来说，质量愈大的恒星，其中心温度愈高。例如，对处于稳定氢燃烧阶段的主序星，其中心温度和密度同恒星质量的关系分别为:

$$T_c \propto M^t, \qquad t \sim (1/3 - 1/2)$$

$$\rho_c \propto M^{-\alpha} \qquad \alpha \sim (1-1/2)$$

太阳: $\mathbf{T_c \sim 1.5 \times 10^7}$ **K**

质量很大的主序星

(例Wolf-Rayet 星M ~(30-50) $M_\odot$的氢燃烧阶段):

$\mathbf{T_c}$**~ (7-9)** $\times$ **10^7** K

点燃核燃烧的条件

热核燃烧点火条件:

$$T_c > T_{nuc}$$

T_c:星体中心温度； T_{nuc}:核燃烧的点火温度

热核燃烧的点火温度是由核物理的微观性质来决定的，它可以从入射核的热运动能(考虑隧道效应)大约等于库仑位垒高度的(1-2)×10^{-4}来估算:

$$kT_{nuc} \sim \eta E_{\text{库仑}}$$

$$E_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_{nuc}} \approx \frac{Z_1 Z_2}{A^{1/3}} MeV$$

$$(\eta \sim (1-2) \times 10^{-4})$$

点燃核燃烧的恒星质量下限

推论:只有当恒星质量大於某一确定值时

$$M > M_{nuc} \propto [\eta E_{库仑}]^{1/t}$$

它才可能点燃相应的热核燃烧。
随着参与反应的原子核的核电荷增长, 其间库仑位垒迅速增加, 上式中的M_{nuc}也随之增加。 因而, 质量不太大的恒星内部只能点燃某些轻核的热核反应而不能点燃较重原子核的核燃烧。也就是说, 它们的核燃烧是不完全的。

核燃烧的密度条件(电子简并压强的作用)

热核燃烧尚未开始或熄灭时，星体核心收缩，$T_c\nearrow$，同时$\rho_c\nearrow$，能否达到$T_c \geqq T_{\rm nuc}$条件。取决于星体核心是否以能够继续收缩。

星体核心继续收缩条件：$\rho_c \leqq \rho_{\rm D}$

$\rho_{\rm D}$：电子简并密度（固体状态）

$$\rho_4 >> \rho_D = 2.8 T_8^{3/2}$$

$$\rho_4 = \rho / (10^4 g/cm^3)$$

$$T_8 = T / 10^8 K$$

若ρ_c>>$\rho_{\rm D}$.电子气体的Fermi(量子)简并压强非常强大,足以抗阻引力收缩,星体不再收缩,T_c不再升高(需考虑中微子发射),(强简并条件),质量小的恒星(主序时ρ_c高),容易达到这一条件这时恒星核心停止热核演化。

结局：白矮星+行星状星

褐矮星(Brown Star)

在原始恒星中, 小质量恒星的中心密度较高。随着形成恒星的星云引力收缩, 原始恒星中心温度不断上升的同时，其中心密度也随着进一步增加。所以， 对于质量太小的恒星(例如，当恒星质量低于 **0.07** $\mathbf{M_{\odot}}$时)，当它们的中心温度尚未上升到氢燃烧的点火温度 **(1.0×10**$^{\mathbf{7}}$**K)**时, 其物质密度也因星体收缩而远远超过了电子简并条件的密度值

$$\rho_4 >> \rho_{D,4} = 2.8T_8^{3/2}$$

此后星体内电子简并压强已足以抗拒星体自引力的压缩，恒星不再收缩，其中温度也不会再升高。因而其中心温度始终低于氢燃烧的点火温度。这些恒星内部也不能点燃前述能源序列中的任何核燃烧。这些恒星的光度远远低于以核燃烧为其能源的主序星的光度，这类光度很低的恒星称为褐矮星**(Brown Star)**

耀星和氦闪

在原始小质量恒星收缩过程中，如果其中心温度 T_c达到H燃烧大规模进行的点火温度附近时，正好物质密度也接近或达到上述简并密度，则由于简并物质中的热核燃烧是不稳定的，它将导致局部爆炸性的H燃烧。不过，它并不会导致整个星体爆炸。近年来在天文观测上发现某些低光度恒星亮度出现短暂的闪亮，人们认为它正是这种正在形成的小质量恒星在弱(电子)简并状态下氢燃烧开始点火时出现的氢闪现象，称为耀星。

对于中、小质量恒星($0.5 < (M/M_\odot) < 2.2$)，氢燃烧(灰渣为氦)结束后核心收缩，温度上升，当温度达到1×10^8 K（氦燃烧的点火温度)时，物质密度接近电子简并的临界密度。简并物质中的热核燃烧是不稳定的，它将导致局部爆炸性的He燃烧 — 氦闪。此时恒星急剧膨胀成为体积庞大的红巨星。太阳在50亿年以后会经历这个过程，体积膨胀到将把火星轨道包含在内。

大质量恒星($(M/M_\odot)>2.2$) 从H燃烧较平稳地转变为He燃烧阶段。

中小质量恒星的氦闪和碳闪

$0.5m_\odot < m < 2.2m_\odot$, 经历He−闪,

太阳不可避免!!

$2.2m_\odot < m < (5\text{-}6)m_\odot$，不经历He−闪

($\rho_c < \rho_D$)，平稳He-燃烧

不能点燃C-燃烧

$(5\text{-}6)m_\odot < m < (8\text{-}9)m_\odot$，将出现失控C-燃烧

爆炸性C—燃烧

$m > 8m_\odot$　　点燃平稳C-燃烧 → 超新星

恒星的熵

$$\frac{S}{N_A k} = \mu(\ln\frac{T^{3/2}}{\rho} + 4\frac{1-\beta}{\beta}) + const.$$

初始主序星

m/m$_\odot$	1	15	25
$S/N_A k$	22.5	23	27

超新星爆发前夕, 核心区物质比熵下降到低于1，星幔区因大量吸收来自核心的光子，但向外扩散较慢，故比熵可高达40以上。

非简并理想气体和辐射场组成的混合系统的比熵(1克物质的熵)

光度

如果产能率 $$\varepsilon = \varepsilon_0 \rho T^{\nu} \qquad \eta(r) = \varepsilon(r) / \overline{\varepsilon}$$

$$L = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{n+1}{4\pi G}\right)^{3/2} \frac{N_A k}{\mu} T_c^{1+\nu} P_c^{\ 1/2} \int_0^{\xi_{core}} \xi^2 \vartheta_n^{2n+\nu} d\xi$$

$\boxtimes_{\mathbf{core}}$ 为热核产能区边界, $\boxtimes_{\mathbf{core}} < 1$, $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{n}}$ 可用近似

$$\vartheta_n(\xi) \approx e^{-\xi^2/6}$$

标准模型

$$\frac{L}{L_{Sun}} = 1.8 \times 10^{25} (\kappa_0 \eta_c) \left(\frac{m}{m_{Sun}}\right)^{5.5} (\mu\beta)_c^{7.5}$$

恒星(牛顿)自引力势能

$$\Omega = -\int_0^R \frac{GM(r)}{r} dM(r)$$

$$= -\frac{3(\gamma-1)}{5\gamma-6}\frac{GM^2}{R}$$

$$= -\frac{3}{5-n}\frac{GM^2}{R}$$

$P_{e,NR}=0.99\times10^{7}(\rho/\mu_e)^{5/3}$

$P_{e,UR}=1.23\times10^{10}(\rho/\mu_e)^{4/3}$

白矮星的结构

白矮星靠电子的简并压抗拒引力的作用来维持天体的结构。

$$P=K\rho^{1+\frac{1}{n}}=K\lambda^{1+\frac{1}{n}}\theta^{n+1}$$

显然K与温度无关，为自由参数。如果n固定

Lane-Emden方程的数值结果

n	ξ_1	$\left(-\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}$	$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}}$
0	2.45	4.90	1.00
1	3.14	3.14	3.29
1.5	3.65	2.71	5.99
2	4.35	2.41	11.4
3	6.90	2.02	54.2
4	15.0	1.80	622.4

Lane-Emden方程

$$\boxed{\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)=-\theta^n}$$

$\rho=\lambda\theta^n$ → $\rho=\rho_c\theta^n$

$r=r_n\xi$

$r_n=\left[\frac{(n+1)K\lambda^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G}\right]^{1/2}$ ⇒ $\boxed{R\propto\rho_c^{\frac{1-n}{2n}}}$

$\theta(\xi=0)=1,\quad \frac{d\theta}{d\xi}(\xi=0)=0$

$\theta(\xi_1)=0\quad \text{at}\ \xi=\xi_1$ ← at $r=R$

$\left.\begin{array}{l}\bar{\rho}=3M/(4\pi R^3)\\ \frac{\bar{\rho}}{\rho_c}=\left(-\frac{3}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}\end{array}\right\}$ → $\boxed{M\propto\rho_c R^3}$

$P=K\rho^{1+\frac{1}{n}}=K\lambda^{1+\frac{1}{n}}\theta^{n+1}$

可得质量-半径关系：$\boxed{R\propto M^{\frac{1-n}{3-n}}}$

质量-半径关系：

$$R \propto M^{\frac{1-n}{3-n}}$$

• 质量和半径彼此依赖，给定其中一个数值则另一个也唯一确定了。

• 对于非相对论性完全简并电子气体，$n = 3/2$，有

$$R \propto M^{-1/3}$$

问？一般的恒星呢！

即质量越大，半径越小。

• 随着天体质量的增大，中心密度不断增大，当**$(\rho / \mu_e) > 7.85 \times 10^6$ g cm^{-3}**时，过渡到极端相对论性完全简并情况，此时$n = 3$ ($\Gamma = 4/3$)，天体动力学不稳定。

非相对论性电子完全简并情况（将参数代入计算）

$$R = 1.122 \times 10^4 \rho_6^{-1/6} \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-5/6} \text{ km}$$

$$M/M_{\text{Sun}} = 0.4964 \rho_6^{1/2} \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-5/2} = 0.7011 R_4^{-3} \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-5/2}$$

自己推导

也可由量纲分析法来估算质量-半径关系

由流体静力学平衡条件

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho(r)$$

于是有

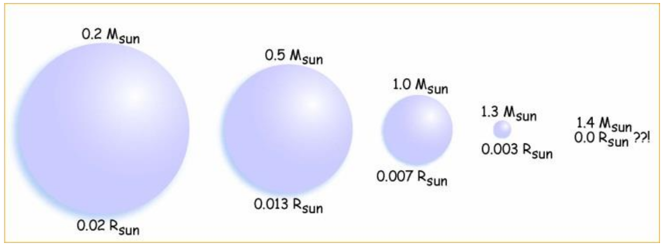
$$\frac{P}{R} \propto \frac{\rho^{5/3}}{R} \approx \frac{1}{R}\cdot\left(\frac{M}{R^3}\right)^{5/3} = \frac{M^{5/3}}{R^6}$$

||

$$\frac{GM}{R^2}\rho \propto \frac{GM}{R^2}\cdot\frac{M}{R^3} \propto \frac{M^2}{R^5}$$

于是得质量半径关系

$$\boxed{R \propto M^{-1/3}}$$



自己推导

$$P_{e,NR} = 0.99\times10^{7}\left(\rho/\mu_e\right)^{5/3}$$

$$P_{e,UR} = 1.23\times10^{10}\left(\rho/\mu_e\right)^{4/3}$$

当$n = 3$，有

$$M = 4\pi\left(-\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}\left(\frac{K}{\pi G}\right)^{3/2}$$

与中心密度ρ_c无关，代入参数有

$$M_{Ch} = \frac{5.836}{\mu_e^2}M_\odot \qquad R = 3.347\times10^4\left(\frac{\rho_c}{10^6\, gmcm^{-3}}\right)^{-1/3}\left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-2/3}\ \text{km}$$

为白矮星的Chandrasekar临界质量。

Lane-Emden方程的数值结果

n	ξ_1	$\left(-\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}$	$\frac{\rho_c}{\bar\rho}$
0	2.45	4.90	1.00
1	3.14	3.14	3.29
1.5	3.65	2.71	5.99
2	4.35	2.41	11.4
3	6.90	2.02	54.2
4	15.0	1.80	622.4

Lane-Emden方程

$$\boxed{\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n}$$

$$\rho = \lambda\theta^n$$

$$r = r_n\xi$$

$$r_n = \left[\frac{(n+1)K\lambda^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G}\right]^{1/2}$$

$$\theta(\xi=0)=1,\quad \frac{d\theta}{d\xi}(\xi=0)=0$$

$$\theta(\xi_1)=0 \quad \text{at}\ \xi=\xi_1$$

$$\bar\rho = 3M/(4\pi R^3)$$

$$\frac{\bar\rho}{\rho_c} = \left(-\frac{3}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}$$

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}} = K\lambda^{1+\frac{1}{n}}\theta^{n+1}$$

也可以完全利用测不准关系+Pauli不相容原理出发证明，

另一种方法推导白矮星Chandrasekhar极限质量

电子的数密度 $n_e \sim \frac{N}{R^3}$

电子的动量 $p_e \sim \frac{\hbar}{\Delta x} \sim \hbar n_e^{\frac{1}{3}}$

极端相对论性电子的能量为 $E_F \sim p_e c \sim \frac{\hbar c N^{\frac{1}{3}}}{R}$

非相对论性电子

$$E_F \sim \frac{P_F{}^2}{2m_e} \sim \frac{\hbar^2}{2m_e} \cdot \frac{N^{2/3}}{R^2}$$

作用在每个Fermi子上的引力能为

$$E_G \sim -\frac{GMm_H}{R} = -\frac{GNm_H^2}{R}$$

于是作用在每个Fermi子上的总能量为

$$E_{tot} = E_{K.E.} + E_G = \frac{\hbar c N^{\frac{1}{3}}}{R} - \frac{GNm_H^2}{R}$$

$$E_{tot} = \frac{\hbar^2}{2m_e} \cdot \frac{N^{2/3}}{R^2} - \frac{GNm_H^2}{R}$$

显然存在有临界粒子数

$$N_{\max} \sim \left(\frac{\hbar c}{Gm_H^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sim 2\times10^{57}$$

能量最低

$$N_{\max} \sim \left(\frac{\hbar c}{G m_H^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sim 2\times 10^{57}$$

- 当$N > N_{\max}$时，电子的间并压将无法抗拒引力作用，引力将使得星体不断收缩。对应一临界质量

$$M_{\max} \sim N_{\max} m_H \sim 1.5 M_{sun}$$

- 当$N < N_{\max}$时，E_{tot}为正，按照能量最低的要求，星体将不断膨胀，最终电子会回到非相对论性电子情形，此时存在有平衡位置。

$$E_{tot} = \frac{\hbar^2}{2m_e}\cdot\frac{N^{2/3}}{R^2} - \frac{GNm_H^2}{R}$$

- 星体处于临界半径（$N = N_{\max}$）时，电子由非相对论转为极端相对论间并，于是有

$$E_F \sim \frac{\hbar c N^{\frac{1}{3}}}{R} \geq m_e c^2 \quad \Rightarrow \quad R \leq \frac{\hbar c}{m_e c}\cdot\left(\frac{\hbar c}{G m_H^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sim 5\times 10^8\ \text{cm}$$

§2. 核物理基础知识简介

原子核结构

核反应

核反应速率 （产能率）

原子核结合能

我们用 $B(Z,A)$ 表示原子核的比结合能（即平均每个核子具有的结合能），则原子核的总结合能为

$$A\cdot B(Z,A)=[Zm_p+(A-Z)m_n-m(Z,A)]c^2$$

其中 $m(Z,A)$ 表示原子核（Z，A）（核电荷数Z，核子数A）

的质量。在原子核（Z，A）内一个质子或(中子)的结合能分别为:

$$B_p(Z,A)=[m(Z-1,A-1)+m_p-m(Z,A)]c^2$$

$$B_n(Z,A)=[m(Z,A-1)+m_n-m(Z,A)]c^2$$

原子核半径

$$R = r_o A^{1/3}$$

r_0=(1.4～1.5)fm, $1\ fm = 10^{-13}\ cm$

核物质的粒子数密度和质量密度分别为

$$\frac{A}{V} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = 0.172\ fm^{-3}$$

$\rho = 2.87 \times 10^{14}\ \mathrm{g/cm^3}$

原子核质量的半经验公式

Weizacker首先将原子核物质当作液滴(液滴模型)

$$E_B = AB = -E_{核能}$$

$$= a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_A \frac{(A-2Z)^2}{A} - a_c Z^2 A^{-\frac{1}{3}} - \lambda a_p A^{-\frac{3}{4}}$$

其中最后一项为对能(质子与中子分别有成对结合的趋向)

$$\lambda = -1 \qquad (偶-偶核)$$

$$0 \qquad (奇-偶核)$$

$$1 \qquad (奇-奇核)$$

实验给出：

a_v=15.75*MeV*, a_s=17.8*MeV*, a_c=0.710*MeV*,

a_A=23.7*MeV* 以及 a_p=34*MeV*。

原子核裂变的条件

原子核质量 $M(A,Z)$ 为

$$M(A,Z)c^2 = Zm_pc^2 + m_nc^2 \cdot (A-Z) - A \cdot B$$

$$E_B(A,Z) = A \cdot B = [Zm_H + (A-Z)m_n - m_{atom}(A,Z)]c^2$$

原子核结合能愈大，则愈稳定（各个同位素相对而言）

如果 $$E_B(A_3,Z_3) < E_B(A_1,Z_1) + E_B(A_2,E_2)$$

或 $$M(A_3,Z_3) > M(A_1,Z_1) + M(A_2,Z_2)$$

则原子核(A_3, Z_3)不稳定,它会自发地裂变

$$(A_3,Z_3) \to (A_1,Z_1) + (A_2,Z_2)$$

原子核稳定性的判断

如果 $$E_B(A_3,Z_3) > E_B(A_1,Z_1) + E_B(A_2,E_2)$$

$$M(A_3,Z_3) < M(A_1,Z_1) + M(A_2,Z_2)$$

$$(A_3,Z_3) \quad \times\!\!\to \quad (A_1,Z_1) + (A_2,Z_2)$$

如果某原子核的质量小于它可能蜕变的那些较轻原子核的质量之和，则这种原子核是不能发生这种衰变，因而是稳定的。

质量亏损

令

$$\Delta M_{AZ} = (M_{AZ} - AM_{\mu})c^2$$
$$= 931.478(M_{AZ} - A) \quad MeV$$

后一式中M_{AZ}以*amu*为单位

$$1amu: \qquad M_{\mu}c^2 = \frac{M(C^{12})}{12}c^2 = 931.478Mev,$$

ΔM_{AZ}称为原子的质量亏损（以能量为单位）

$$E_B = [Z \cdot \Delta M_H + (A-Z) \cdot \Delta M_n - \Delta M_{AZ}] \quad MeV$$

如果 $A_3 = A_1 + A_2 \qquad Z_3 = Z_1 + Z_2$

且 $\Delta M(A,Z) > \Delta M(A,Z) + \Delta M(A,Z)$

则 $E_{B_3} < E_{B_1} + E_{B_2} \quad \Rightarrow \quad (A,Z)_3$ 必定不稳定

原子核的Mayer-Jensen壳层模型

实验事实——原子核两个重要性质

幻数（magic number）存在——原子核性质周期性

Z，N: 2、8、20、28、50、82、126、152 这些原子核最稳定。

1）各同位素丰度比例最大——原子核最稳定

2）寿命最长最稳定——慢中子俘获截面最小，最不易反应。

3)结合能之差:

$$\Delta E_N = B(Z,N) - B(Z,N-1)$$

$$\Delta E_Z = B(Z-N) - B(Z-1,N)$$

B为一个核子平均结合能

ΔE_N为最外面一个中子结合能

ΔE_Z为最外面一个质子结合能

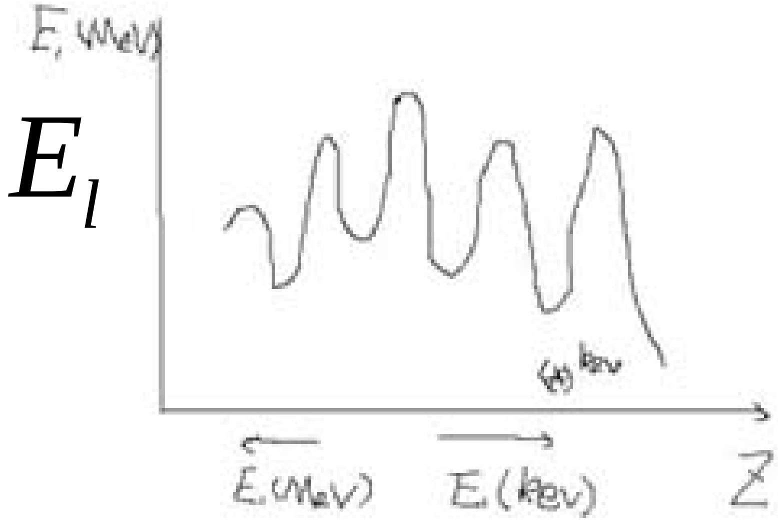
则在幻数处，ΔE_N、ΔE_Z最大

∴幻数处最稳定。

4)各原子核能级图第一激发态能量 E_l （以基态为0）的大小与Z的关系，发现在幻数处 E_l 很高，

∴基能级很稳定，不易激发。

且（*）处于 E_l 特别低，原子核极容易激发



5) 电四极矩在幻数处变号，说明幻数存在，但壳模型计算电四极矩数值相差一、两个量级。单纯的壳模型不行。表明有集合运动（转动）

原子核壳模型思想(单粒子按能级填充模型)

由于幻数存在，Z、N周期性与原子中电子按壳层填充周期性一样。即粒子从最低能态开始填起（由Pauli原理），逐渐向外壳填补。在原子物理中，电子可看为在原子核的中心场中（其它束缚电子作用当作屏蔽效应，使$Z \rightarrow Z^*$ 有效电荷）即在统一的自洽场中运动。严格来说，原子核内的位势V（r）不能当作中心场（有非中心力项）。但是，由于它与原子光谱周期性的类似, Mayer和Jensen提出了壳模型，解释了不太重的原子核的大多数性质，非常成功，讨论核反应时需要了解它，天体物理学中一般（至今）皆用它，其关键仍认为核子在原子核内运动可看作是在一个统一的位场——自洽场中运动，用中心位场V（r）描述，不考虑其它核子的作用，每个核子都具有一定能量。角动量的独立的单粒子轨道，各核子在能级上的填充遵从Pauli原理。

原子核总能量等于各单粒子能量之和。

原子核角数量等于各单粒子角动量的矢量之和

在确定总角动量j下，自旋-轨道相互作用能量：

$$\langle \hat{W} \rangle_j = \begin{cases} -a l \cdot G, & (对\ j=l+\frac{1}{2}) \\ a(l+1)\cdot G, & (j=l-\frac{1}{2}) \end{cases}$$

$a \simeq 13A^{-2/3}$

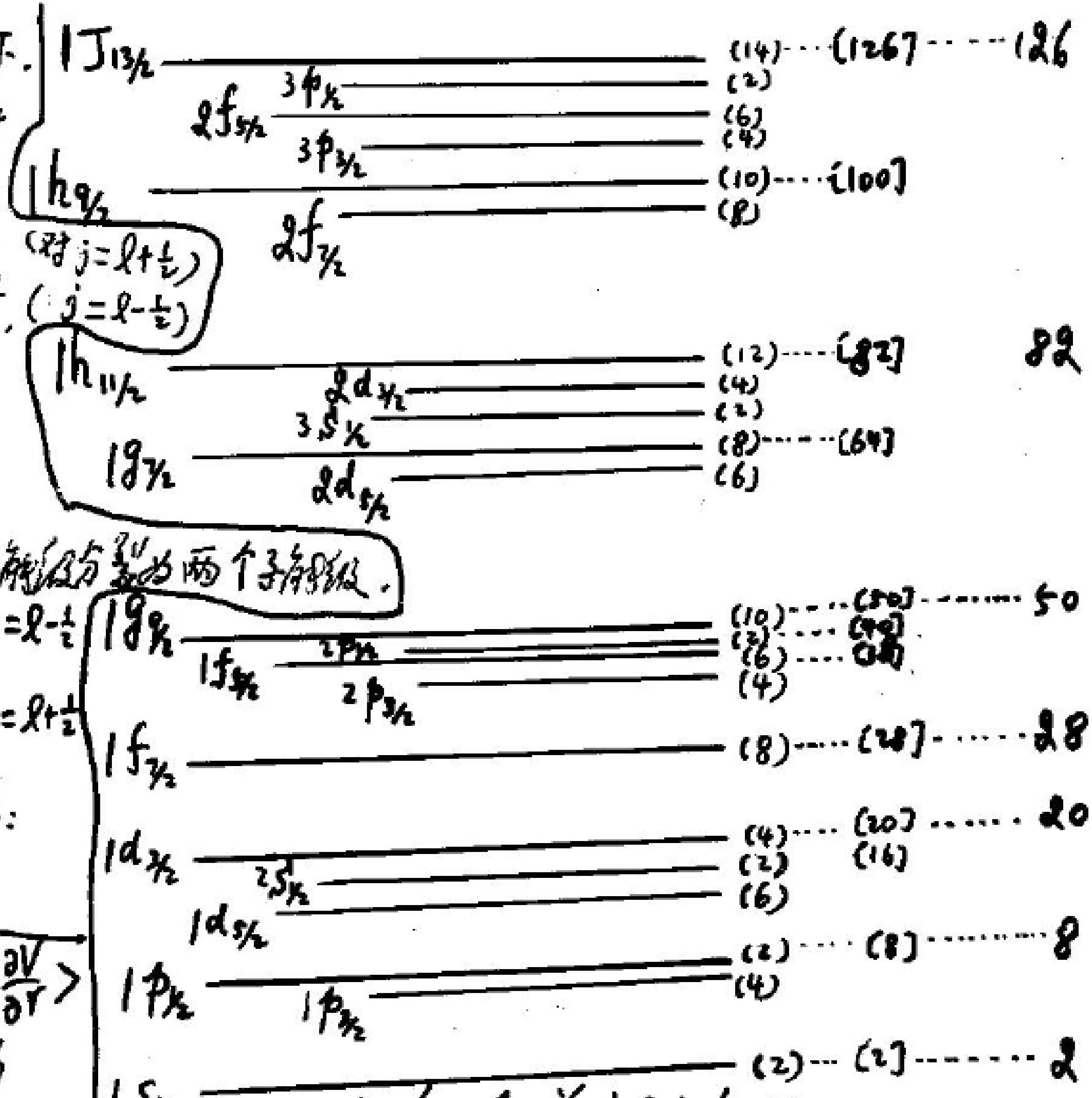
$G=\langle \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\rangle_j$

它导致原来(n,l)能级分裂为两个子能级。

能级分裂间距：

$\Delta E_{l-\frac{1}{2},\,l+\frac{1}{2}} \simeq a(2l+1)\langle \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\rangle$

V为核力位势。



(计入自旋-轨道耦合作用)

壳模型中核子的能级图

每个能级代表一个次要的壳层，逐渐填充核子，例$1p_{1/2}$子壳层上可填充两个中子和两个质子，对核合成特别重要的壳层是它同下一壳层之间的能级间距比平均间距大很多的壳层，这出现在核子数（质子和中子分别具有）幻数处：2、8、20、28、50、82、126、152。

在幻数附近，原子核的许多性质发生剧烈的变化。

当质子、中子数为幻数的核是稳定的（束缚能很大）。

它基本上解释了前面所说的一系列实验事实（在此基础上改进的核综合模型更为完善）。

对中子数为幻数处的原子核而言，俘获中子的几率（截面）相对非常小，这个性质对于在晚期恒星内部俘获中子形成重元素的核合成过程非常重要。

在 N=50、82、126 幻数处的这个性质决定了晚期恒星内部重元素合成理论的框架，在次壳层附近也有类似性质。

闭壳层(幻数)

同原子结构中的电子壳层一样：凡是闭壳层（即填满了一个主壳层）结构的原子核是特别稳定的 。 例:

$$He_2^4 = (1S_{\frac{1}{2}})^2$$ (对 n、p 皆如此)

$$O_8^{16} = (1S_{1/2})^2(1P_{3/2})^4(1P_{1/2})^2$$

$$Ca_{20}^{40} = (1S_{1/2})^2(1P_{3/2})^4(1P_{1/2})^2(1d_{5/2})^6(2S_{1/2})^2(1d_{3/2})^4$$

其中，每个壳层上标数字代表填满该子壳层的中子或质子数，等于 2j+1，在双幻数处最稳定，很重的双幻数的核为 $_{82}Pb^{208}$。

根据壳层模型，原子核各满壳层的核子的总角动量为0。

∴若原子核的核子数目超过了满壳层，则它的角动量由满壳层以外的核子的角动量来决定。

三条规则:

1)偶偶核的基态。核自旋为0，宇称为+，∴自旋、宇称由最外壳层上的单个奇核子决定。

2) 奇A核的Jπ基本上由最外面一个核子的jπ决定（有例外，此时J=j-1），奇一奇核（质子奇、中子奇）jπ 耦合问题较复杂。

原子核的集体模型

实验依据:

振动能级 $60 < A < 150, \quad 190 < A < 220$ (远离双幻数)

转动能级 $150 < A < 190, \quad A > 220$

核反应：核反应过程释放的能量

核反应 $$a + X \to Y + b$$

过程中能量守恒: $$E_{aX} + (M_a + M_X)c^2 = E_{bY} + (M_b + M_Y)c^2$$

E_{ax}、E_{by}分别是在质心坐标系统中a，X和b，Y的动能。令

$$Q_{XY} = E_{bY} - E_{aX} = [(M_a + M_X)c^2 - (M_b + M_Y)c^2]$$

Q_{xy} 称为反应热。$Q_{xy} > 0$为放热反应，$Q_{xy} < 0$ 为吸热反应

吸热反应条件 (E_{bY} >0):

$$E_{aX} \geq (M_b + M_Y) - (M_a + M_X)$$ 此下限称为反应阈

一切计算都可用质量亏损ΔM_X代替M_X

核反应的复合核过程

当入射粒子能量较低时大多数核反应可用复合核模型描述:

核反应过程分为两个阶段:

第一步：入射粒子同靶核碰撞形成复合核。

第二步：复合核通过各种可能的了射通道衰变（蒸发模型）：

衰变过程中，复合核的衰变同其形成过程无关（无记忆系统）。

衰变到各出射道的几率只依赖于所形成的复合核的共振能级性质。

在低能范围内，复合核的单个共振峰才重要（除了最轻的原子核体系外，一般能量不大于几个Mev）。

但是，在较高的能量下，复合核的共振峰数目增长。复合核的特征是：共振峰很窄，且共振能级之间的间距很近。

往往利用对若干共振态取平均后的反应截面——核反应统计理论。

(续)

复合核过程的时标比入射粒子“穿越”原子核的时标长10^6 倍以上，即复合核可以以某种激发状态下存在一定的时间之后，才发射出射粒子，然后稳定到基态。

反应截面对于原子核内部结构的性质非常敏感，而产物的角分布并不集中在入射粒子的速度方向上。

由于反应时标较长，入射粒子有“足够”的时间将它的能量平均分配在所有的核子上，它不仅仅可以激发单个核子，还可能激发多个核子，因此要涉及复合核的许多共振能级状态（可以认为经历大量的复合核能态）

复合核衰变几率

在复合核衰变问题中，如果粒子a相对于粒子X的波函数为

$$\Psi(\vec{r}) = f_l(r)Y_l^m(\vartheta,\varphi)$$

$$-\frac{\hbar}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}f_l(r) + [\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) - E]f_l(r) = 0$$

复合核衰变几率:

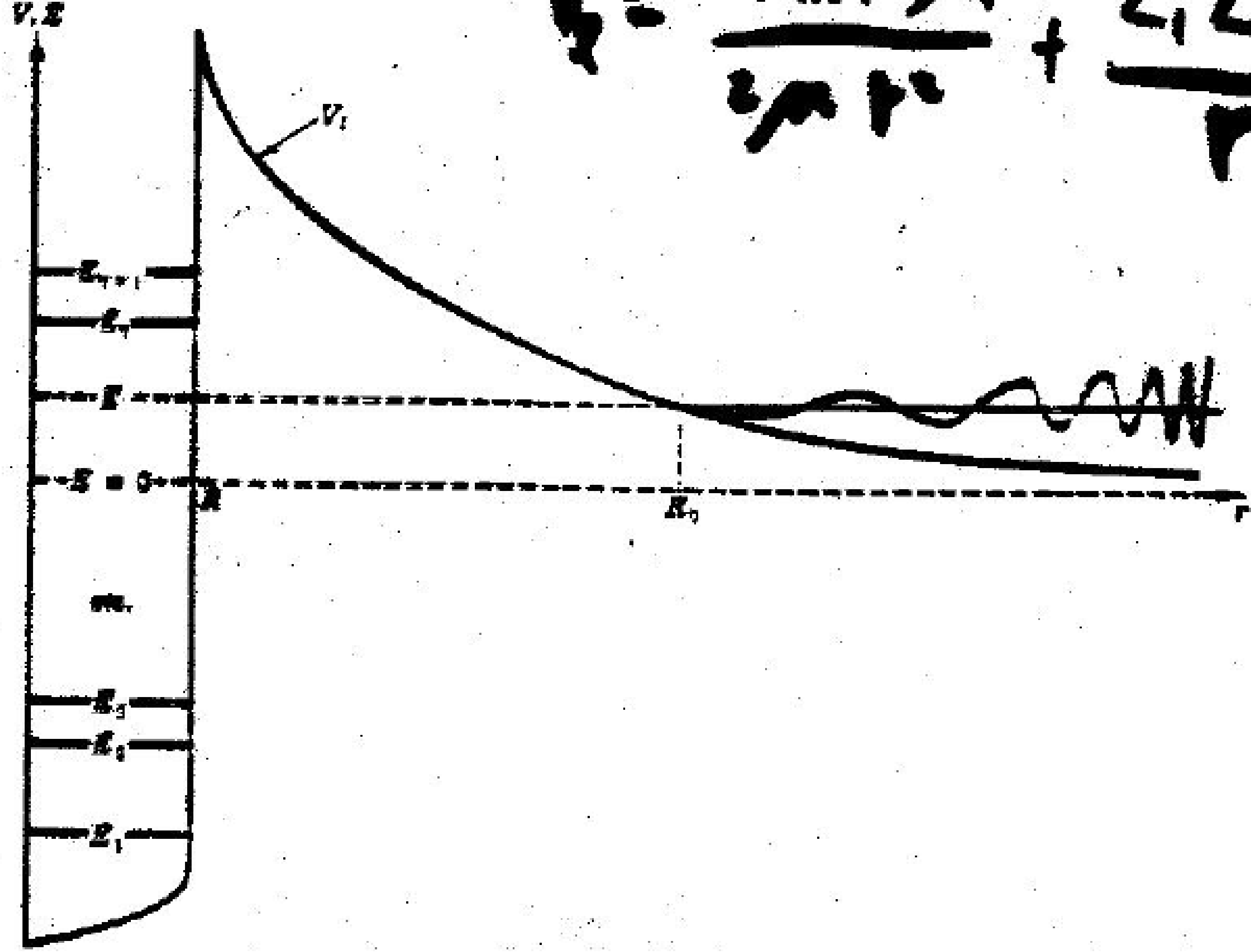
$$\Gamma_l = \frac{\hbar}{\tau} = \hbar\lambda_l = \hbar V_\infty P_l\left|\chi_l(R)\right|^2 = \frac{3\hbar v}{R}P_l\vartheta_l^2$$

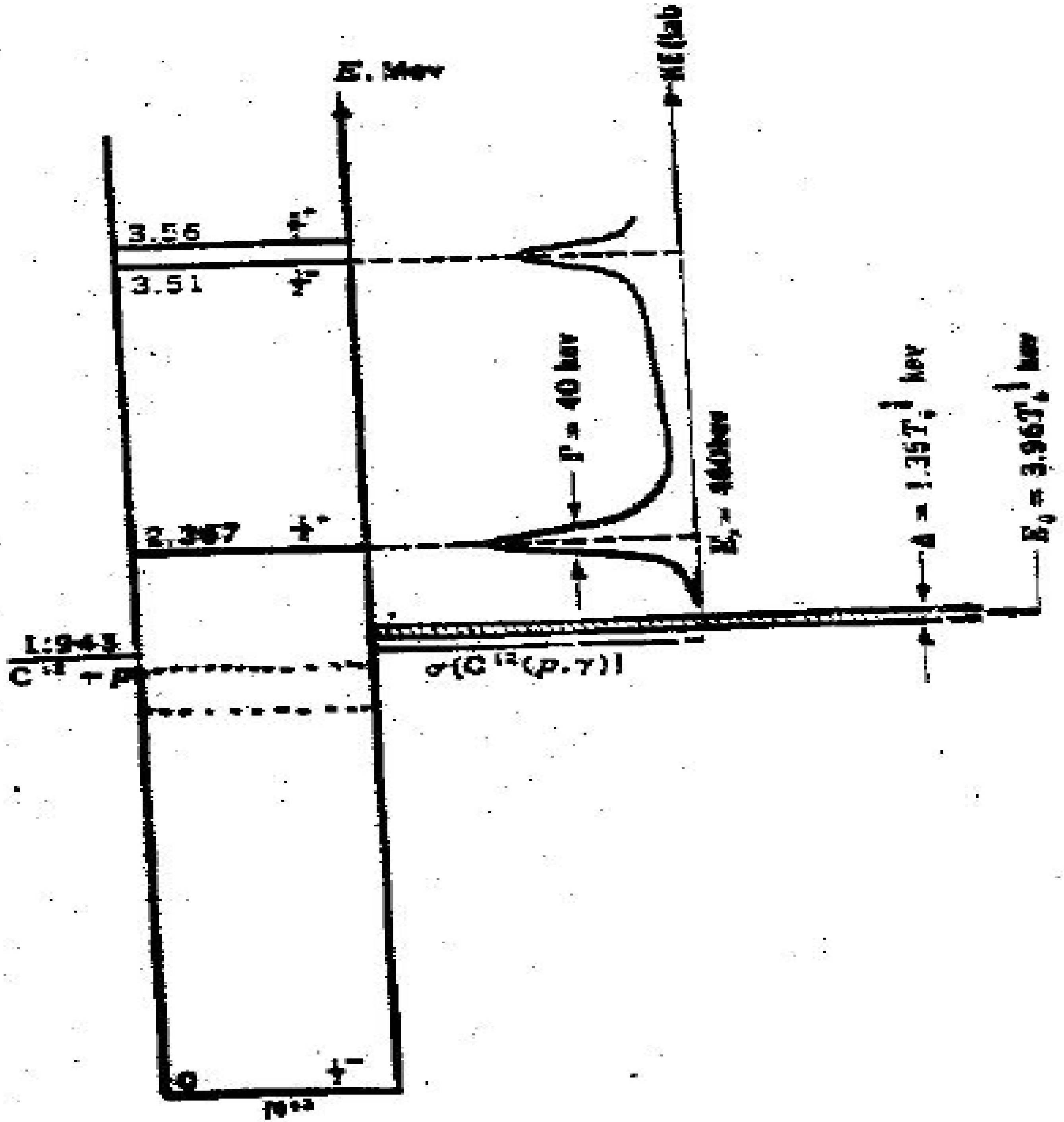
穿透因子

$$P_l = \frac{\left|\chi_l(\infty)\right|^2}{\left|\chi_l(R)\right|^2} \qquad f_l(r) = \frac{\chi_l(r)}{r}$$

$0 < \vartheta < 1$ （复合核激发能级的约化宽度（无量纲））。

$$V_l = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$





E, Mev
3.56
3.51
2.367
1.943
0
σ(C¹²(p,γ))
Γ = 40 kev

能级分宽度

能级分宽度=复合核衰变几率

$$\Gamma_l(=\Delta E)=\frac{\hbar}{\tau}=\hbar\lambda_l=\hbar V_\infty P_l\left|\chi_l(R)\right|^2=\frac{3\hbar v}{R}P_l\vartheta_l^2$$

利用WKB近似, 通过求解Schrodinger方程求出(隧道效应)穿透因子:

$$P_l\approx(\frac{E_C}{E})^{1/2}\exp[-bE^{-1/2}-7.62(l+1/2)^2\cdot(ARZ_1Z_2)^{1/2}]$$

$$b=31.28Z_1Z_2A^{1/2}\qquad(kev)^{1/2}$$

$$E_C=\frac{Z_1Z_2}{A_1^{\frac{1}{3}}+A_2^{\frac{1}{3}}}Mev$$

反应截面

$$反应截面=\frac{1秒内反应数}{入射粒子流量}$$

$$a+X\rightarrow W^{*}\rightarrow Y+b$$

共振反应的反应截面:

核反应的Breit-Wigner公式

$$\sigma_{r,l}(a,b)=\frac{\pi ƛ_a^2\omega\Gamma_a\Gamma_b}{(E-E_r)^2+(\frac{\Gamma}{2})^2}$$

统计权重:

$$\omega=\frac{2J+1}{(2J_a+1)(2J_x+1)}$$

$$k_a^2\sigma_l(a,b)=k_b^2\sigma_l(b,a)$$

——核反应的细致平衡原理。

$$k=1/ƛ$$

$ƛ$: 粒子的德布洛意波长

k: 对应的波数

$$\pi ƛ^2=\frac{656.6}{AE(kev)}barn$$

1 $barn$ =10^{-24} cm^2。

核反应率

$$r_{aX} = N_a N_X \int_0^{\infty} \sigma(v) v \phi(v) dv = N_a N_X < \sigma v >_{aX}$$

$$\phi(v)dv = (\frac{\mu}{2\pi kT})^{3/2} e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} 4\pi V^2 dV$$

< σ v>: 对入射粒子进行热运动速度(按Maxwell速度分布)平均

原子核X的平均寿命: $\tau_a(X) = \frac{N_X}{r_{aX}} = (\lambda_{aX} N_a)^{-1}$

若原子核同时参与几种反应，则其总平均寿命τ（x）为

$$\frac{1}{\tau(X)} = \sum_i \frac{1}{\tau_i(X)}$$

（∵反应数相加）

$$= 2.94\times10^{36}\rho^2\,\frac{X_1X_2}{A_1A_2}\,\frac{\omega f}{(AT_6)^{3/2}}\,\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma_r}\,e^{-11.61E_r/T_6}\ \mathrm{cm^{-3}\,s}$$

$= \dfrac{2J+1}{(2J_1+1)(2J_2+1)}$. J为共振态角动量. J_1、J_2为入射道粒子的自

为复合态能级宽度. Γ_1为散射道分宽度(入射道). $\Gamma_2=\Gamma-\Gamma_1$

应: 在某一温度附近. $r_{12}\propto T^n$. $n=\dfrac{11.61E_r}{T_6}-$

是窄共振: $\langle\sigma v\rangle=\dfrac{2\pi\hbar^2}{\mu kT}\sum_r\left(\dfrac{\omega\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma}\right)_r e^{-E_r/}$

$\gamma=\omega\Gamma_1\Gamma_2/\Gamma_r$ 称为共振强度(在共振能量范围内积分截面)

上必须(测定在恒星内部温度

非共振反应核反应率

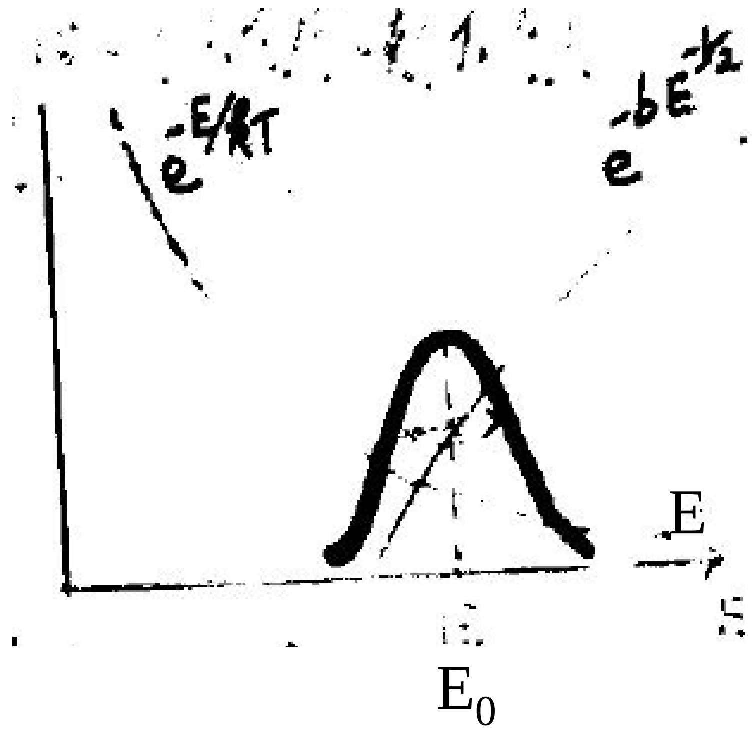
非共振反应是指入射粒子动能远离共振峰(共振曲线的两翼尾巴处)

$$r_{aX} = N_a N_X \int_0^{\infty} \varphi(E) V(E) \sigma(E) dE$$

$$\varphi(E)dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{E}{kT} e^{-E/kT} \frac{dE}{(kTE)^{1/2}}$$

$$\sigma(E) = S(E)/E \cdot e^{-bE^{-1/2}}$$

$$b = 31.28 Z_1 Z_2 A^{\frac{1}{2}} \qquad (kev)^{\frac{1}{2}}$$



非共振反应核反应率

$$r_{12} = \frac{2.62\times10^{29}}{1+\delta_{12}}\rho^2\frac{X_1X_2}{A_1A_2AZ_1Z_2}fS_0(1+\frac{5}{12\tau})\tau^2e^{-\tau} \qquad cm^{-3}\sec^{-1}$$

$$\tau = \frac{3E_0}{kT} = 42.48(\frac{Z_1^2Z_2^2A}{T_6})^{1/3}$$

$$S_0 = S(E_0+\frac{5}{6}kT)$$ 核反应的有效能量

$$E_0 = (\frac{bkT}{2})^{2/3}$$ Gamow 峰值能量

$$b = 31.28Z_1Z_2A^{\frac{1}{2}} \qquad (kev)^{\frac{1}{2}}$$

非共振反应核反应率(简化形式)

对稳定的热核燃烧，整个过程中温度变化很缓慢。在T_1附近

$$\frac{T-T_1}{T} << 1$$

则可证明

$$r_{12}(T) \approx r_{12}(T_1)\left(\frac{T}{T_1}\right)^n \qquad n = \frac{\tau - 2}{3}$$

恒星内部的平稳核燃烧

核燃烧	核燃料	主要产物	T_{nuc} (K)	ρ (g/cm³)	产能率 $\varepsilon \propto T^n$	释能率 (erg/g)	燃烧时标 (年)
氢燃烧	^{1}H	^{4}He (^{14}N) (CNO)	(1-2)E7 (PP) >2.0 E7 (CNO)	10^2	T^4 (T^7=1.4) (PP) $T^{16.7}$ (T^7=2.0) (CNO)	6.4 E 18	1E12 (0.2 $M_\odot$) 1.2 E10 (1.0 $M_\odot$) 1E7 (15 $M_\odot$) 1E5 (50 $M_\odot$)
氦燃烧	^{4}He	^{12}C(小质量星) ^{16}O(^{22}Ne)	1-3 E8	10^3- 10^4	T^{40} (T^8=1.0)	(7.5 - 7.9) E17	2 E5 (T_8=1.3) 4 E3 (T_8=1.5)
碳燃烧	^{12}C	$^{20-22}$Ne (^{23}Na) $^{24-26}$Mg (^{27}Al) ^{28}Si	8.8 E8	(1-2)E5	T^{27} (T^9=1.0)	4.0 E17	12年(无对流)
氖燃烧	^{20}Ne	^{16}O,^{24}Mg… (Mg-P)	1.5 E9	1 E6	T^{49} (T^9=1.5)	1.0 E17	40 天(无对流) 几年 (对流)
氧燃烧	^{16}O	^{24}Mg-^{32}S (直到铁族元素)	2.1 E9	(3-5)E6	T^{33} (T^9=2.0)	5.0 E17	6 天 (对流)
硅燃烧	^{28}Si	铁族元素	3.5 E9	1 E7	T^{47} (T^9=3.5)	1.9 E17	几小时(无对流) 1 天 (对流)

各核燃烧阶段的产能率

$$\dot{\varepsilon}_H = B_H[Y(^1H)]^2\rho T^n, n \sim \begin{cases} 4 & (T_7 \sim 1.4) \quad (PP链) \\ 16.7 & (T_7 \sim 2.0) \quad (CNO循环) \end{cases}$$

$$\dot{\varepsilon}_{He} = B_{He}[Y(^4He)]^3\rho^2 T^{n_2}, n_2 \sim 40 \qquad (T_8 \sim 1.0)$$

$$\dot{\varepsilon}_C = B_C[Y(^{12}C)]^2\rho T^{n_3}, n_3 \sim 27 \qquad (T_9 \sim 1.0)$$

$$\dot{\varepsilon}_{Ne} = B_{Ne}\{\frac{[Y(^{20}Ne)]^2}{Y(^{16}O)}\}T^{n_4}, n_4 \sim 49 \qquad (T_9 \sim 1.5)$$

$$\dot{\varepsilon}_0 = B_0 Y^2(^{16}O)\rho T^{n_5}, n_5 \sim 33 \qquad (T_9 \sim 2.0)$$

$$\dot{\varepsilon}_{Si} \sim B_{Si}Y(^{28}Si)T^{n_6}, n_6 \sim 47 \qquad (T_9 \sim 3.5)$$

§5. 恒星的热核演化

§5.1 主序星的热核燃烧

太阳

太阳内部主要热核反应— **PP**反应链（**H**−燃烧）

太阳中微子问题

CNO循环（中、大质量主序星内部**H**−燃烧）

太阳

太阳

半径: $R_{\odot} \approx 7 \times 10^5$ km

表面温度: $T_{eff} \approx 5760$ K

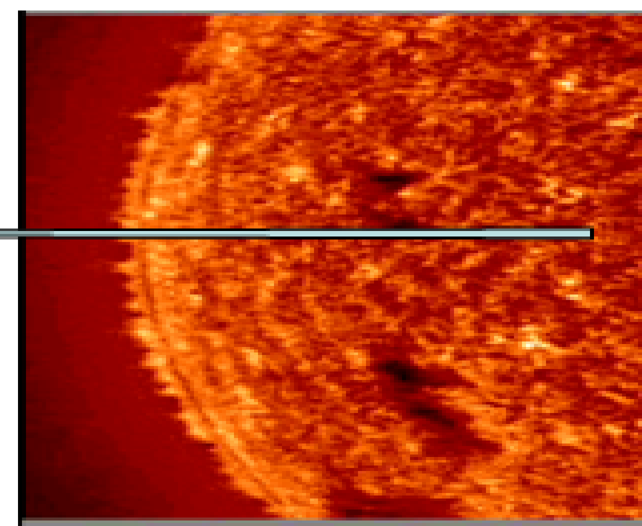
光度: $L_{\odot} \approx 3.8 \times 10^{33}$ ergs/sec

质量: $M_{\odot} \approx 2.0 \times 10^{33}$ 克

太阳表面普遍磁场 ~ 1 高斯

太阳自转周期:27.5天

$< \rho > \; < 1$ g/cm^3



地球

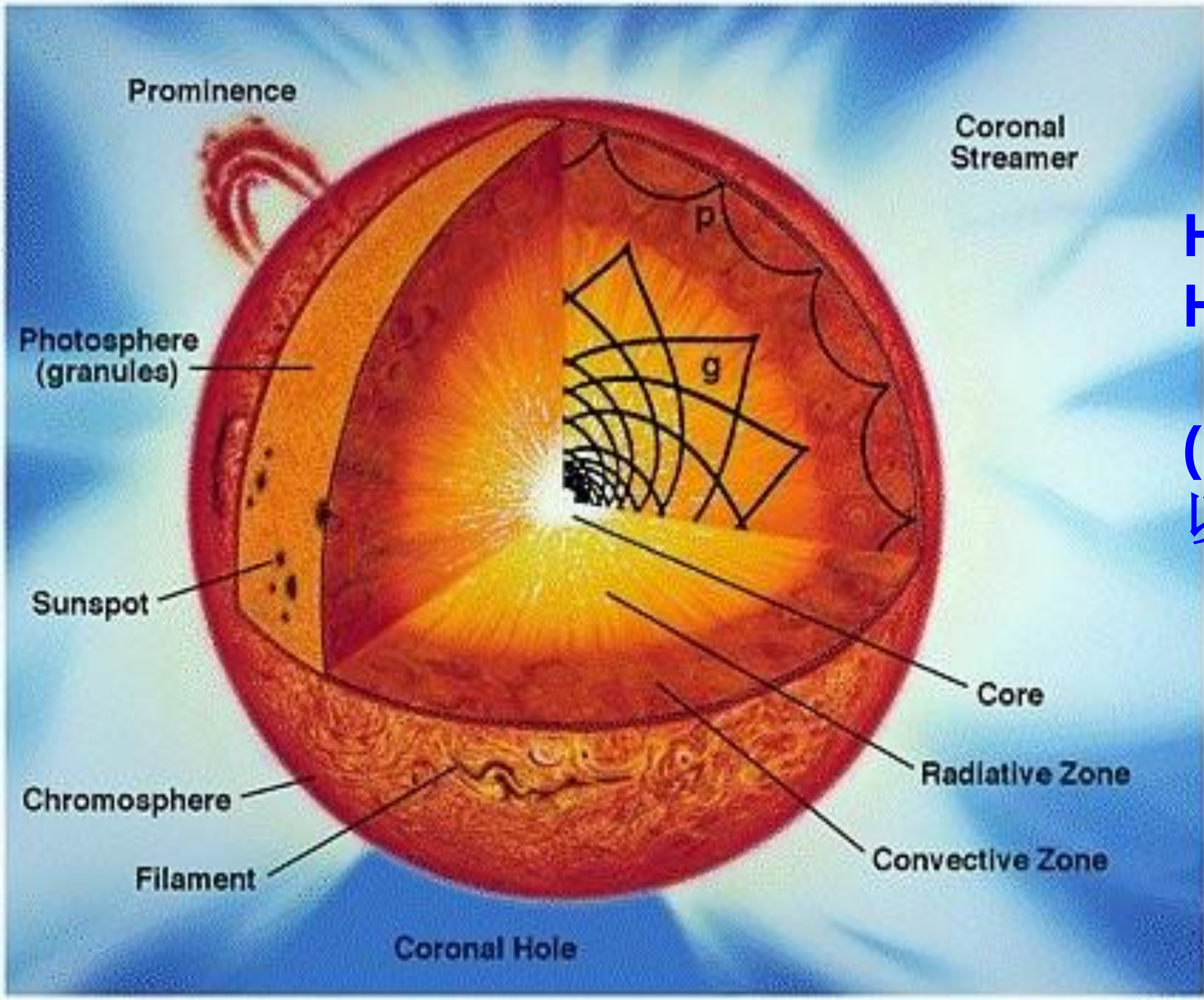
$D = 1.5 \times 10^8$ km

$R_{地球} \approx 6370$ 公里

太阳状况

$T_c \approx (1.4-1.5)\times 10^7$ K

$\rho_c \approx (50\text{-}100)$ g/cm^3



H: X≈0.68

He: Y≈0.30

Z≈0.02

(C、N、O 以上重元素)

太阳能源

从很远处看，太阳是一个黄色的矮星

太阳中心区域内持续不断的热核燃烧。

$$4\ {}^{1}H \rightarrow {}^{4}He$$

由Einstein 的质量-能量关系式 $E = Mc^2$

$$\Delta M\ c^2 = \{4\ M({}^{1}H) - M({}^{4}He)\}c^2$$

$$= 26.73\ \text{MeV}$$

同时释放26.73 MeV的能量。

(续)

太阳内部每秒钟都有**7,750**万吨的氢在这种热核爆炸过程中转化为氦，正是由于这种热核燃烧维持着太阳巨大的光度。

太阳内部这样规模的热核燃烧已经持续了**45**亿年。

估计它还可以这样稳定地再燃烧**50**亿年左右。

在恒星世界中太阳是一个普通的恒星。

恒星内部热核燃烧与演化

一颗恒星的演化史本质上就是它内部核心区域的热核(燃烧)演化史。大质量恒星演化进程将先后经历一系列热核燃烧阶段:

H燃烧（稳定核燃烧，主序星）:

核合成主要结果：$4\ {}^{1}H \rightarrow {}^{4}He$

1. PP反应链---- $T_c < 1.6\times10^7$ K

小质量恒星 < 1.1 $M_\odot$

对太阳(⊙), 稳定燃烧 100亿年

太阳内部主要热核反应—强大的中微子源

pp链:氢(质子)合成氦(α粒子) — 小质量(M < 1.1 $M_{\odot}$)主序星 的氢燃烧

$$p + p \rightarrow {}^{2}H + e^{+} + \nu_e \qquad (pp-\nu)$$

$$p + e^{-} + p \rightarrow {}^{2}H + \nu_e \qquad (pep-\nu)$$

99.75%

0.25%

$$ {}^{2}\mathrm{H} + p \rightarrow {}^{3}\mathrm{He} + \gamma $$

86%

14%

$$ {}^{3}He + {}^{3}He \rightarrow \alpha + 2p $$

$$ {}^{3}\mathrm{He} + \alpha \rightarrow {}^{7}\mathrm{Be} + \gamma $$

$$ {}^{3}He + p \rightarrow \alpha + e^{+} + \nu_e \ (Hep-\nu) $$

99.85%

0.15%

$$ {}^{7}Be + e^{-} \rightarrow {}^{7}Li + \nu_e \qquad ({}^{7}Be-\nu) $$

$$ {}^{7}Be + p \rightarrow {}^{8}B + \gamma $$

$$ {}^{7}Li + p \rightarrow 2\alpha $$

$$ {}^{8}B \rightarrow {}^{8}Be^{*} + e^{+} + \nu_e \qquad ({}^{8}B-\nu) $$

$$ {}^{8}Be^{*} \rightarrow 2\alpha $$

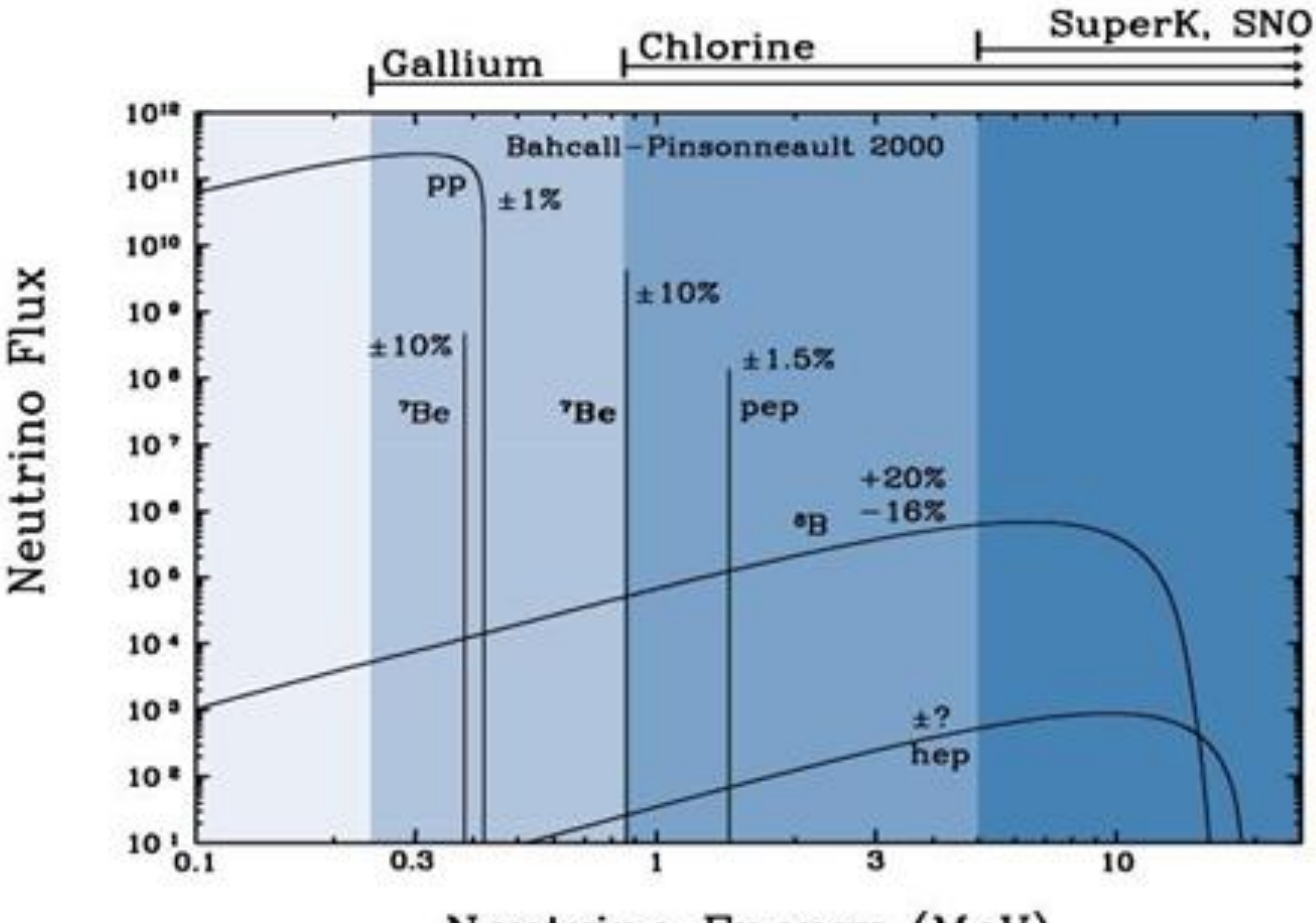
太阳——强大的中微子源

源反应	简称	中微子能量 E (MeV)			中微子流量(理论预言) (在地球处每秒穿过1米^2 面积的太阳中微子数目)
		性质	极大能量	平均能量	
$^1H + {}^1H \rightarrow$ $^2D + e^+ + \nu_e$	低能 (pp) 中微子	连续	**0.420**	**0.265**	5.95×10^{14}
$^7Be + e^- \rightarrow$ $^7Li + \nu_e$	中能 (7Be) 中微子	分立	**0.86 (90%)** **0.38 (10%)**		4.77×10^{13}
$^8B \rightarrow$ $^8Be + e^+ + \rightarrow_e$	高能 (^{8}B) 中微子	连续	**14**	**7.2**	5.05×10^{10}

从太阳发射出来的中微子主要是低能中微子。中能中微子的流量只占低能中微子流量的1/20。高能中微子流量只有低能中微子流量的三十万分之一。

中微子流量理论预言取自文献:J. Bahcall, ApJ, 2001, 555, 990-1012。

太阳中微子能谱



SuperK, SNO
Chlorine
Gallium
Bahcall-Pinsonneault 2000
pp
±1%
±10%
±10%
±1.5%
^{7}Be
^{7}Be
pep
+20%
−16%
^{8}B
±?
hep
Neutrino Flux
0.1
0.3
1
3
10
Neutrino Energy (MeV)

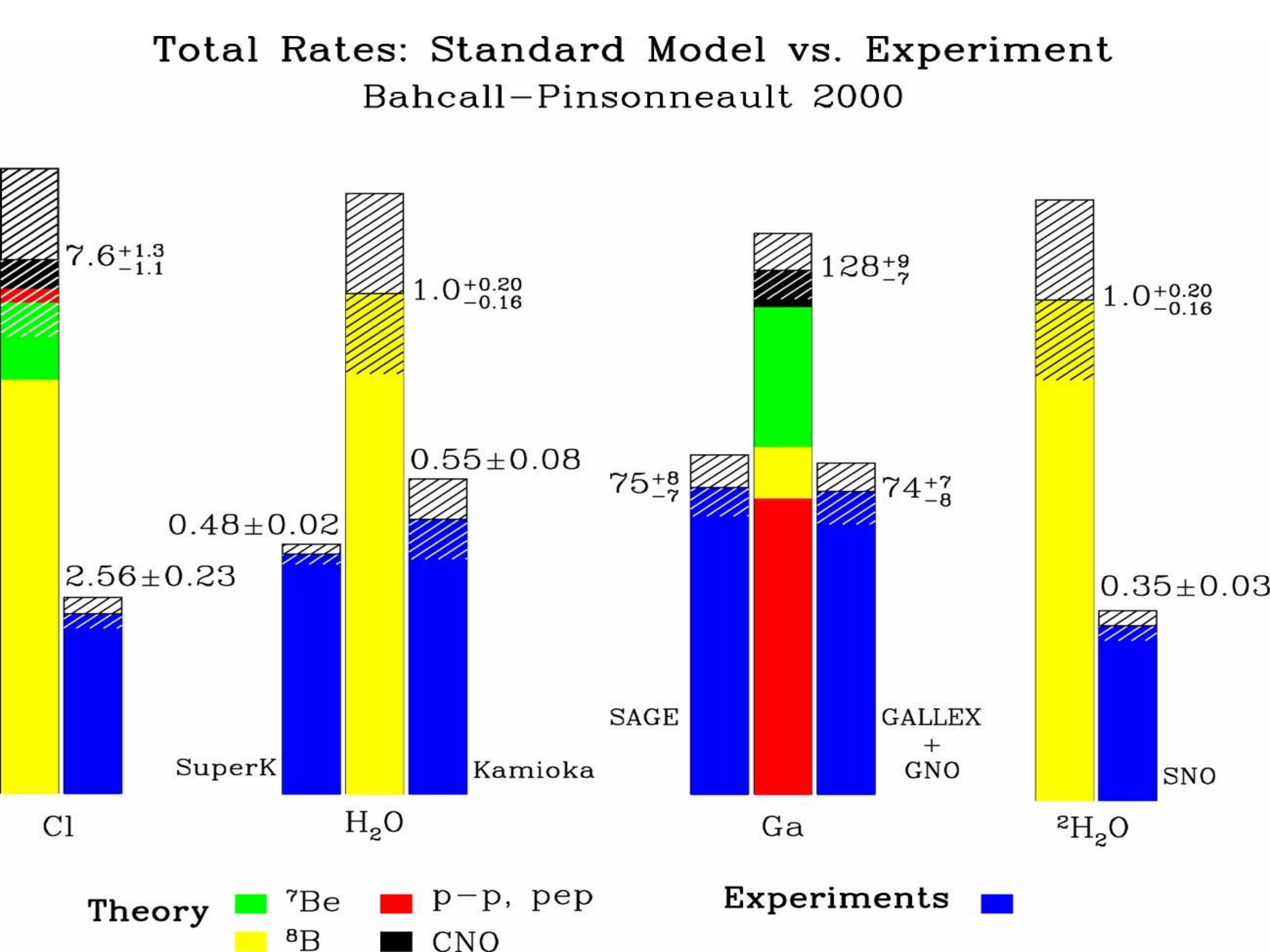
Davis中微子探测实验

由于中微子能谱差异及某些技术原因，按照上述方法, Davis于1954年未能探测到太阳中微子流。

早在中微子尚未被实验证实之前的1946年, 意大利物理学家B. Pontecorvo就提出了利用一种“氯探测器”来探测太阳中微子的建议。

1958-1968年间，在美国南达科他州Homestake这个地点的地下废矿井中,采用 455 m^3的C_2Cl_4作为探测材料, Davis利用放射性化学方法建立了一个大型的中微子探测器 — 氯探测器。

1968年公布了第一批探测结果: 探测到的太阳中微子流量只有理论预言流量的1/3 —— 轰动全世界。


Total Rates: Standard Model vs. Experiment
Bahcall–Pinsonneault 2000
7.6$^{+1.3}_{-1.1}$
2.56±0.23
Cl
1.0$^{+0.20}_{-0.16}$
0.48±0.02
0.55±0.08
SuperK
Kamioka
H_2O
128$^{+9}_{-7}$
75$^{+8}_{-7}$
74$^{+7}_{-8}$
SAGE
GALLEX
+
GNO
Ga
1.0$^{+0.20}_{-0.16}$
0.35±0.03
SNO
^2H_2O
Theory
^{7}Be
^{8}B
p–p, pep
CNO
Experiments

中微子振荡理论(非标准理论)

按照中微子的标准模型，中微子的质量为零，它们以光速运动。存在着 3 种不同类型(即 3 种味)的中微子:电子中微子(ν_e)、μ中微子(ν_μ)和τ中微子(ν_τ)，它们之间彼此不相关，分别只同电子、μ轻子和τ轻子密切相关。

早在Davis准备筹建Homestake的太阳中微子探测器的1958年，Pontecorvo就曾猜测过中微子同反中微子之间出现互相转化的可能性（现在看来，这种猜想不正确）。1962年，日本一个研究小组提出e中微子同μ中微子之间存在着互相转换的可能性。

正当Davis等人公布首批氯探测器探测结果的1968年，Pontecorvo也就提出了这 3 种味的中微子很有可能互相来回地转化，称为“中微子振荡”。

在太阳内部的热核燃烧过程中产生的中微子都是ν_e。但在从太阳到地球的漫长行进过程中，ν_e不断地转化为ν_μ(很少一部分可能转化为ν_τ)，而ν_μ或者转化为原来的ν_e，或者转化为ν_τ，而ν_τ也不断转化为ν_μ(一小部分可能转化为ν_e)。在飞行过程中明显数量的ν_e转变为ν_μ的典型距离可能只有10m左右。

从太阳内部热核反应产生的电子中微子在飞行目地空间距离（1.5×10^8 km）之后，当它们到达地球上的中微子探测器时，平均而言，大约这 3 味中微子的数量各占 1/3。

前面介绍的所有建立在放射性化学方法基础上的（氯、镓）中微子探测器探测的都仅仅只是ν_e，因而它们的实测流量当然只有太阳内部发出时的ν_e流量的 1/3。

中微子诱导核反应: $\nu_e + {}^2D \to p + p + e^-$

SNO重水中微子探测器的主要特色并不是探测上述中微子同电子的弹性散射。它的特点是探测中微子诱导核反应发生的次数。

这个中微子诱导核反应的中微子能阈值为1.442MeV。

因而，同日本神冈或"超神冈"中微子探测器类似，它也只能单纯地探测太阳的高能（^8B）中微子。当太阳的高能（^8B）中微子轰击重水中的氘原子核时，虽然反应的几率非常小(与中微子同电子弹性碰撞散射的概率的数量级差不多)，但是，每天大约有10^{16}～10^{17}个高能（^8B）中微子轰击1000t重水中的氘原子核(总数约为3×10^{32}个)，预计每天将会发生几万或几十万次上述核反应，释放出几万到几十万个高能电子。同日本神冈或"超神冈"探测器类似，这些高能电子的速度超过介质(重水)中的光速，它们会产生闪耀的水切连科夫辐射，这种闪光被安置在盛放重水容器四周支撑架内的9600个高效率光电倍增管组成的阵列来探测。

- 虽然SNO探测站与"超神冈"探测站都是只能单纯地探测太阳的高能^8B中微子，但是引起中微子诱导核反应的中微子事件只有SNO中微子探测器可以探测，而参与中微子电子散射的中微子事件可以分别被"超神冈"和SNO两个中微子探测器探测出来("超神冈"中微子探测器精度更高)。

SNO 测量 太阳 ^{8}B 中微子的工作原理

$$\nu_e + d \to p + p + e^- \qquad \text{(Charged Current:CC)}$$
$$\nu_x + d \to p + n + \nu_x \qquad \text{(Neutral Current:NC)}$$
$$\nu_x + e^- \to \nu_x + e^- \qquad \text{(Elastic Scattering:ES)}$$

探测结果：

$$\phi_{\rm CC}^{\rm SNO} = 1.76^{+0.06}_{-0.05}({\rm stat.})^{+0.09}_{-0.09}\ ({\rm syst.})$$
$$\phi_{\rm ES}^{\rm SNO} = 2.39^{+0.24}_{-0.23}({\rm stat.})^{+0.12}_{-0.12}\ ({\rm syst.}) \qquad \times 10^{-6}\,{\rm cm}^{-2}\,s^{-1}$$
$$\phi_{\rm NC}^{\rm SNO} = 5.09^{+0.44}_{-0.43}({\rm stat.})^{+0.46}_{-0.43}\ ({\rm syst.}).$$

测得的电子中微子、μ 中微子、τ 中微子流量为

$$\phi_e = 1.76^{+0.05}_{-0.05}({\rm stat.})^{+0.09}_{-0.09}\ ({\rm syst.}) \qquad \times 10^{-6}{\rm cm}^{-2}\,s^{-1}$$
$$\phi_{\mu\tau} = 3.41^{+0.45}_{-0.45}({\rm stat.})^{+0.48}_{-0.45}\ ({\rm syst.})$$

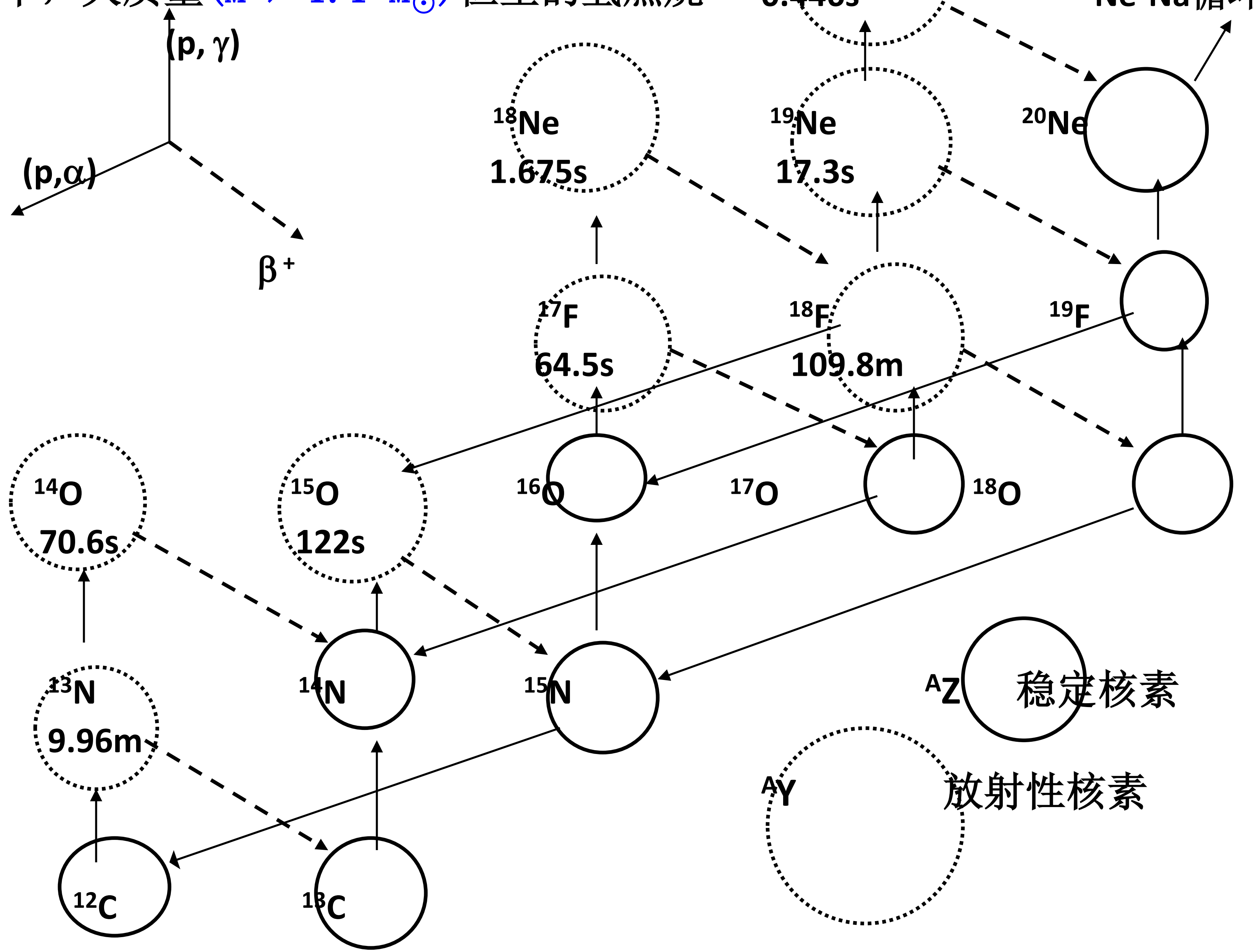
计入了中性流弱作用之后，SNO测量的 ^{8}B中微子 总流量同标准模型的预言值 **5.05 ± 1.0** $\times 10^6\ {\rm cm}^{-2}\ s^{-1}$ 非常一致

Ahmad et al. Phys. Rev. Lett.89 (2002) 011302

由于上述 SNO中微子探测器实验和超神冈中微子探测器的实验 相配合，证实了三种中微子振荡的理论。为此，太阳中微子探测实验的开创者Davis和(神冈)超神冈中微子探测器的实验的领导者、以及x-ray 空间天 文探测卫星的领导者三人分享了2003年诺贝 尔物理学奖金。

CNO循环($T_c > 2 \times 10^7$ K)

中，大质量($M > 1.1\ M_\odot$)恒星的氢燃烧

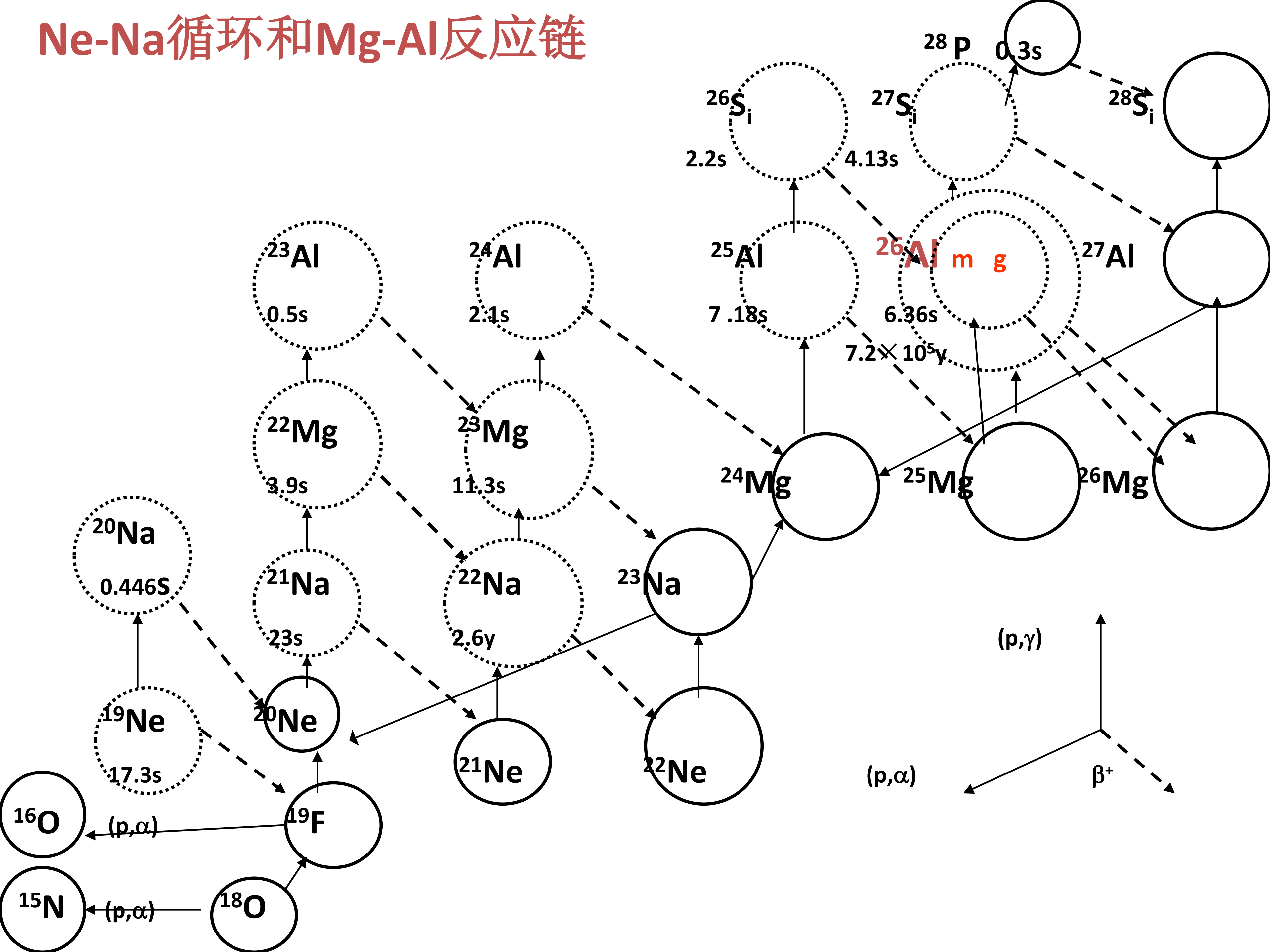


上半主序星与下半主序星

上半主序与下半主序的分界点位置大约在$1.1m_\odot$处

	上半主序恒星	下半主序恒星
表面温度	高 :4×10^4-6×10^3 K	低 :6×10^3-2×10^3K
中心温度	较高:9×10^7-2×10^7 K	低: < 2×10^7 K
氢燃烧过程	CNO(双)循环	PP反应链
光度	高	较低
质量	中、大质量恒星	小质量恒星
质光关系	$L\propto m^4$	$L\propto m^2$
对流区位置	中心对流区	表层对流区
氢燃烧寿命	寿命较短	寿命很长

Ne-Na循环和Mg-Al反应链



星际^{26}Al天体起源问题

1982-1984, 空间卫星探测到较强的、源自星际^{26}**Al** 衰变(电子俘获)的宇宙γ-射线 (**1.809 MeV**)流，由此估算存在于银河系星际空间中的放射性元素 ^{26}**Al** ($\tau_{1/2}$ = **7.4**×**10**^{5}年)的总量约为 **2M**$_{\odot}$ 。

不断提供这种星际放射性元素 ^{26}**Al** 的天体源泉是什么类型天体?

曾是**20**世纪最后**15**年内国际关注的重大疑难问题之一。

国际理论界倾向于星际^{26}**Al**来自**II**型超新星，新星，**WR**星和大质量主序星各种模型。(^{26}**Al**核合成途径通过(**p,γ**)过程中的**Mg-Al**循环)

但是，从核物理实验进展来重新审查，都存在着严重的矛盾:

Mg-Al循环关键的核反应分支比

$$R \equiv \frac{\sigma(^{27}Al + p \rightarrow {}^{28}Si + \gamma)}{\sigma(^{27}Al + p \rightarrow {}^{24}Mg + \alpha)}$$

按通常原理, 以前错误推断为**10**$^{-4}$, **1988**年实验发现为**10**^{4}, 相差 **8** 个量级。由此断定, 新星、**WR**星和大质量主序星不可能是星际^{26}**Al**的主要源泉天体(彭秋和，**1995**)。

表 1　γ 射线天文学中最重要的放射性核素及其发射的 γ 射线

衰变链	衰变方式	半衰期	γ 射线能量 (MeV)
$^{22}Na \to ^{22}Ne$	β^+, E_c	2.6yr	1.275
$^{26}Al(g) \to ^{26}Mg$	β^+,E_c	7.2×10^5yr	1.809
$^{44}Ti \to ^{44}Sc$	E_c	47.3yr	0.078(93%) 0.068 0.147
$^{44}Sc \to ^{44}Ca$	β^+, E_c	3.93h	1.157(99.9%) 1.500
$^{56}Ni \to ^{56}Co$	E_c, β^+	6.10d	0.158(98.8%) 0.812 0.750
$^{56}Co \to ^{56}Fe$	E_c, β^+	78.8d	0.847 1.771 1.238 1.038 2.599 3.253
$^{57}Co \to ^{57}Fe$	E_c	271d	0.122 0.014
$^{60}Fe \to ^{60}Co$	β^-	3×10^5yr	0.059
$^{60}Co \to ^{60}Ni$	β^-	5.271yr	1.332 1.173

* E_c 表示电子俘获过程，$^{26}Al(g)$ 表示处于核基态的 ^{26}Al

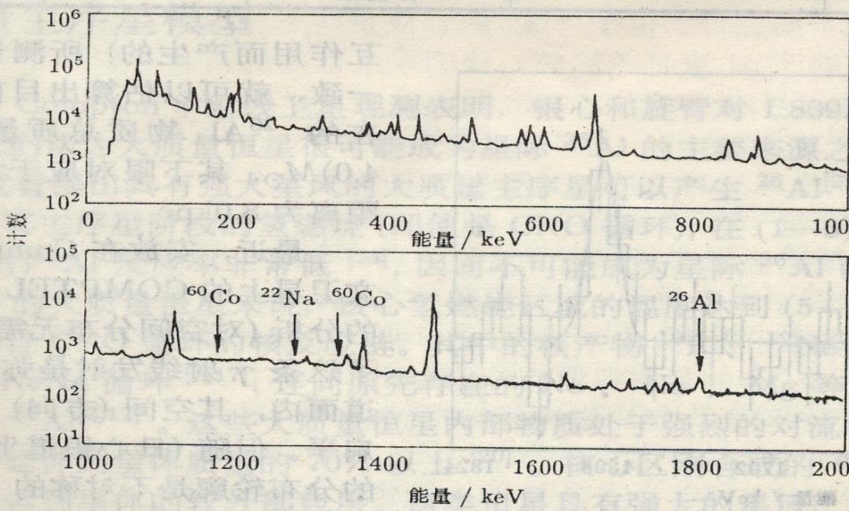


图 1　利用 HEAO-3 获得的银道面方向的观测光谱 [3]

表 2 观测资料及初步分析结果

空间探测器	观测时间	数据处理者及时间	假定的 γ 射线源分布	流量 $10^{-4}\gamma\cdot cm^{-2}\cdot s^{-1}\cdot rad^{-1}$	FWHM	参考文献
HEAO–3	1979 年秋（两周）	Mahoney *et al.* 1980		$\sim$1	<3keV	[3]
		Mahaney *et al.* 1982	与 >70MeVγ 射线源分布一致	6.0±2.3	<3keV	[4]
		Mahaney *et al.* 1984	与 >70MeVγ 射线源分布一致	4.8± 1.0		[5]
		Mahaney *et al.* 1986	点源	1.4± 0.9		[6]
SMM	1980—1982	Share *et al.* 1985	与 >100MeVγ 射线源分布一致	4.0±0.4	38^{+21}_{-38}keV	[7]
		Purcell *et al.* 1988		1.4± 0.9		[8]
MPI	1982	Ballmoos *et al.* 1987	点源	6.4± 2.6	17%	[9]
		Ballmoos 1991	与薄热等离子体分布一致	1.5		[10]
四个气球探测器	1977—1984	MacCallum 1987 *et al.*	与 > 70MeV γ 射线源分布一致	$3.9^{+20}_{-1.7}$		[11]
			点源	1.3± 0.9		[11]
GRIS	1988	Gehrels *et al.* 1991	与 >100MeV γ 射线源分布一致	l=0° 方向 $4.2^{+1.9}_{-1.7}$	4.2±2.4keV	[12]
				l=335° 方向 $5.4^{+2.9}_{-3.1}$	$5.5^{+4.5}_{-5.5}$keV	[12]
HEAOGONE	1987	Malet *et al.* 1990	点源	1.9± 0.9		[13]
Compton Observatory	1992	Diehl *et al.* 1993	（直接测量）弥漫源	4.0		[14]

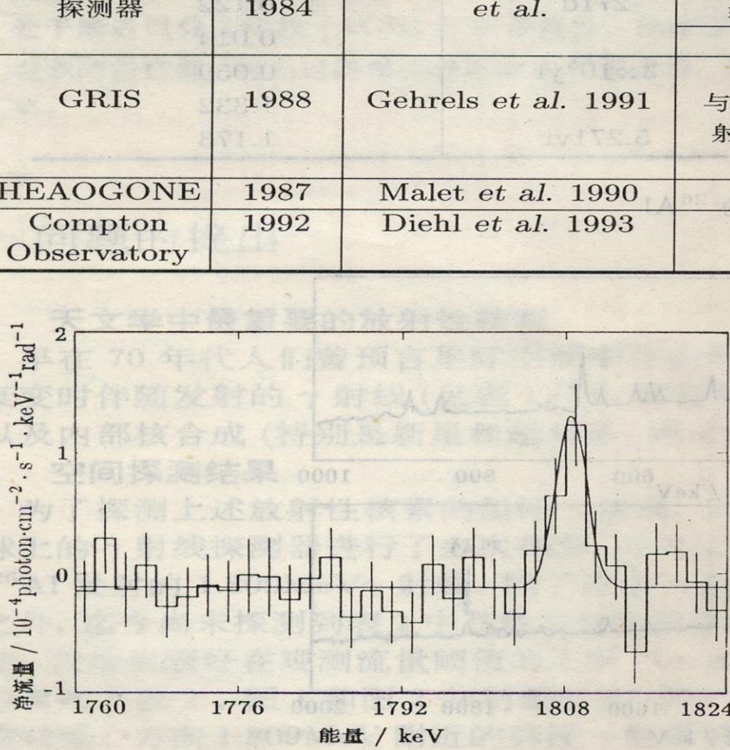


图 2 根据 HEAO–3 观测结果，经处理得到的银心方向，1.809MeV 附近弥散 γ 射线辐射谱 [5]

互作用而产生的）所测量的分布基本一致，就可以估算出目前银河系内存在的 ^{26}Al 物质总质量约有 (2.6—4.0)$M_{\odot}$，其下限对应于太阳到银心的距离为 8.0kpc 。

最近，安放在 Compton γ 射线天文卫星上的 COMPTEL 仪器测量结果的分析（对空间分布无需作假定），显示了这条 γ 射线发射是弥漫地分布在银道面内，其空间（方向）分布是相对地扁平。但随（日心银道坐标系中）银经的分布轮廓是不对称的（参看图 3），在银心和船底（旋）臂这两个方向有着明显的重要贡献 [14,16] 。

为什么星际空间中存在如此大量

A key reaction of the Mg-Al reaction chain

The Mg-Al chain of nuclear reactions was basically taken as a closed chain(T_9 ⊙0.4) for all calculations of ^{26}Al yield in Massive MS and WR stars. The branch ration, *R* , was taken much greater than 1.

$$R = \frac{\sigma(^{27}Al(p,\alpha)^{24}Mg)}{\sigma(^{27}Al(p,\gamma)^{28}Si)} >> 1 \qquad (T_9 \leq 0.4) \qquad (before \quad 1988)$$

But according to new experiments of nuclear physics on ^{27}Al(p,♋)^{24}Mg (Thielemann et al. 1988) and ^{27}Al(p,♑)^{28}Si (Champagne ea al. 1989),

$$R = \frac{\sigma(^{27}Al(p,\alpha)^{24}Mg)}{\sigma(^{27}Al(p,\gamma)^{28}Si)} \leq 0.01 \qquad (T_9 \Box\ 0.07 - 0.3) \qquad (after \quad 1989)$$

It means the Mg-Al chain is a non-closed reaction chain and the ^{26}Al yield in the H-burning of Massive MS and WR stars must much less than ones calculated before 1989.

The conclusion is: The Massive MS and WR stars are hard to be the sources of significant ISM ^{26}Al (Peng, 1994, Chin. Phys.Lett.11:480

III. Alternative way to nucleosynthesize ^{26}Al

A fusion reaction of ^{14}N with ^{16}O:

$$^{14}N + {}^{16}O \rightarrow {}^{30}P^{*}$$

$$\rightarrow \quad {}^{28}Si + p + n + 4.247MeV \qquad (a)$$

$$\rightarrow \quad {}^{25}Mg + p + \alpha + 1.604MeV \qquad (b)$$

$$\rightarrow \quad {}^{26}Al + \alpha + 7.909MeV \qquad (c)$$

The branch ratio is:

$$\frac{(b)+(c)}{(a)} << 1, \qquad (c) < (b), \qquad for \qquad E_k \sim (6-8)MeV$$

or

$$(c) \geq (b), \qquad \frac{(c)}{(a)} \rightarrow (0.1-0.3) \qquad for \qquad E_k < 1MeV$$

(Switkowski et al., 1977, Nucl.Phys.A279:507)

$$^{14}N + ^{16}O \rightarrow ^{26}Al + \alpha$$

This reaction has been reinvestigated by He,Yang and Peng (1992). It is further reinvestigated ,especially, through a experiment by a group of The Institute of Physics in the Chinese Academy of Atomic Energy (2004).

The branch ratio

$$\eta = (c)/((a)+(b)+(c))$$

may be ~ 20% for E_k<1MeV

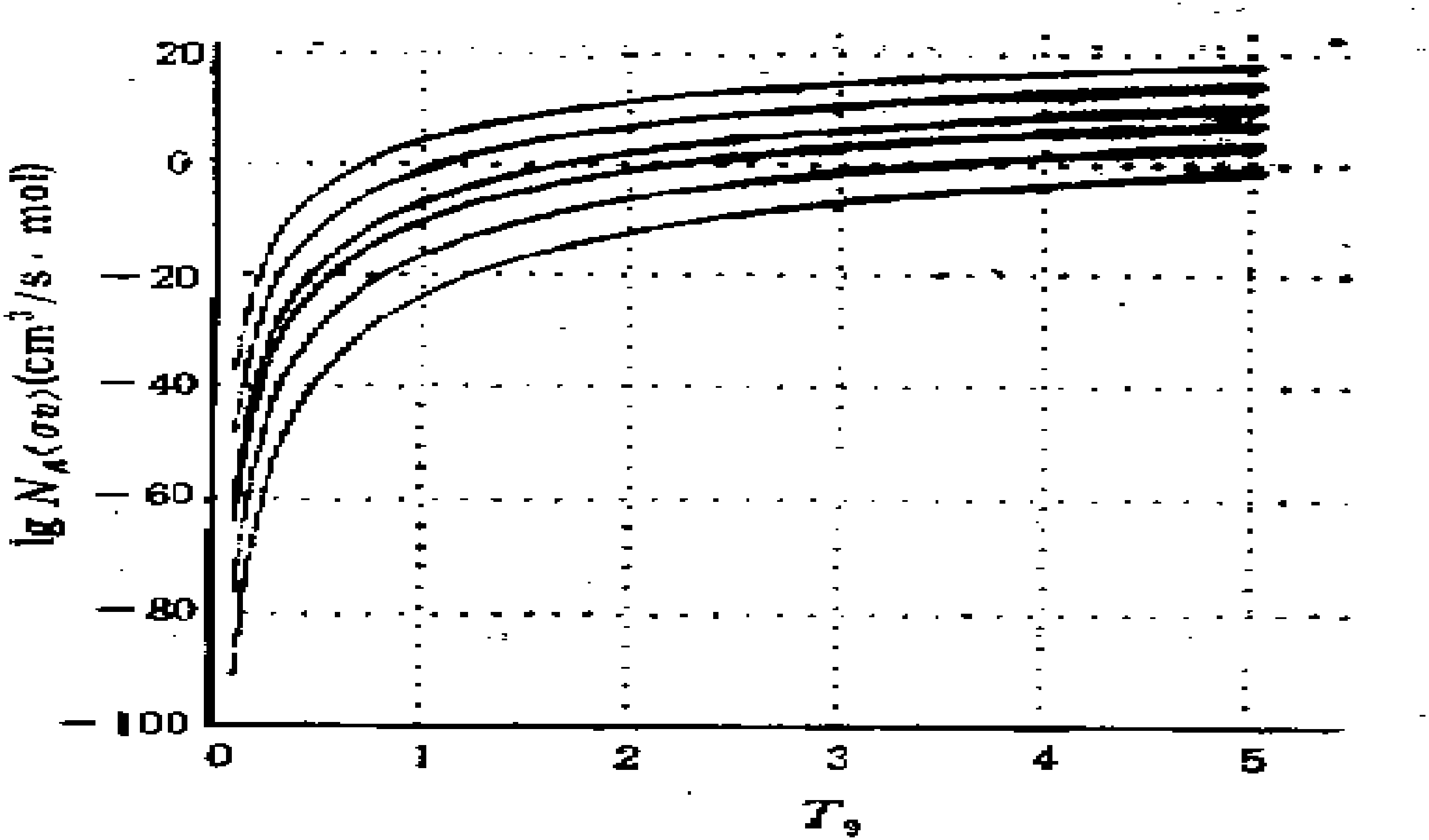


Fig. The curved of $N_A<\sigma v>$ vs. T_9
(From the top down to the bottom, the curves are corresponding to $^{12}C+^{12}C(\times 10^5)$, $^{12}C+^{14}N(\times 10^{12})$, $^{12}C+^{16}O(\times 10^9)$, $^{14}N+^{14}N(\times 10^6)$, $^{14}N+^{16}O(\times 10^3)$ and $^{16}O+^{16}O$)
(He, Yang and Peng, 1992, Acta Astropfysica Sinica, 12,122 (in Chinese))

IV. Suggestion of Sources for the ISM ^{26}Al

By the fusion reaction of ^{14}N with ^{16}O

$$^{14}N + ^{16}O \rightarrow ^{26}Al + \alpha$$

in a) SNII+SNI$_b$ and b) SNI$_a$:

a) SNII+SNI$_b$:

Due to the sharp convection during SN explosion, ^{16}O in the shell without Si-burning may be mixed with ^{14}N (in the shell after H-burning but without He-burning), enough ^{26}Al will be produced by the reaction branch (c) under the explosive temperature (2-3)$\times 10^9$K.

b) SNI$_a$ (for the case the accreting WD is ONeMg WD):

^{14}N deposited beneath the surface of the WD , from the accretion flow , is mixed with ^{16}O (with a few of ^{12}C), enough ^{26}Al will be produced by the reaction branch (c) under the explosive temperature (2-3)$\times 10^9$K.

A Simple Estimation

$$X(^{26}Al) \sim \begin{cases} 3.4\times10^{-7}\rho_4 \dfrac{X_0(^{14}N)}{10^{-2}} \dfrac{\eta}{0.1} \dfrac{t}{10^3 s} & (T_9 = 2) \\ 2.0\times10^{-2}\rho_4 \dfrac{X_0(^{14}N)}{10^{-2}} \dfrac{\eta}{0.1} \dfrac{t}{10^3 s} & (T_9 = 3) \end{cases}$$

(according to the nuclear reaction rate by He, Yang and Peng, 1992)

$\rho_4 = \rho/(10^4 g/cm^3)$. Taking $X(^{16}O)=0.5$

We take :The frequency of SNe in the Galaxy:

$$q \sim 3/10^2 Yr. \sim 3\times10^4 / Myr.$$

Assuming: 1% of mass of the SNII takes part in the reaction above
And the average mass of SNII is about 20 $M_{\odot}$, Then total amount of ^{26}Al produced in this process during 1Myr. is about

$$M(^{26}Al) \sim 6\times10^3 \cdot X(^{26}Al)$$

Conclution

$$M(^{26}Al) \sim \begin{cases} 2\times10^{-3}\rho_4 \dfrac{X_0(^{14}N)}{10^{-2}} \dfrac{\eta}{0.1} \dfrac{t}{10^3 s} \qquad M_{Sun} \quad (T_9 = 2) \\ 12\rho_4 \dfrac{X_0(^{14}N)}{10^{-2}} \dfrac{\eta}{0.1} \dfrac{t}{10^3 s} \qquad M_{Sun} \quad (T_9 = 3) \end{cases}$$

It is promising, and This way to nucleosynthesize ISM ^{26}Al is independent with nucleosynthesis of ^{27}Al and ^{60}Fe.

产生星际^{26}Al 的SNI_a模型

1995年卫星探测结果 有利于来自于超新星。在理论上，仍呈现合成过多的^{27}**Al**和^{44}**Ti**的矛盾。

1992年彭秋和曾提出过一种与国际采用的**rp**过程不同的核合成途径:

$$^{14}N+^{16}O\rightarrow ^{26}Al+\alpha$$

并提出相应的SNI_a型超新星抛射星际^{26}**Al**的模型。

最近，北京原子能研究院姜山研究小组赴日本进行核物理实验，证实了上述产生^{26}**Al**的预言，他们已在北京建立了相应的设备，进一步研究这个核反应。我们正在进一步合作研究(**SNI_a**、**SNII**模型)。

同时， **1992**年彭秋和同上海原子核研究所合作，对碳,氧核燃烧(晚期大质量恒星关键的两个核反应)(^{12}**C**+^{12}**C** 和 ^{16}**O**+^{16}**O**)的 核反应率进行了研究，我们发现目前国际上迄今仍采用的这两个热核反应率仍然是七十年代以前的外推估计值，它们分别高估了**(3-4)** 和 **(7-10)**倍[何建华、杨锦晴、彭秋和, **1992**]。这个结果必定对大质量恒星演化和超新星理论有重要影响。近年国际上也怀疑这些核反应率。

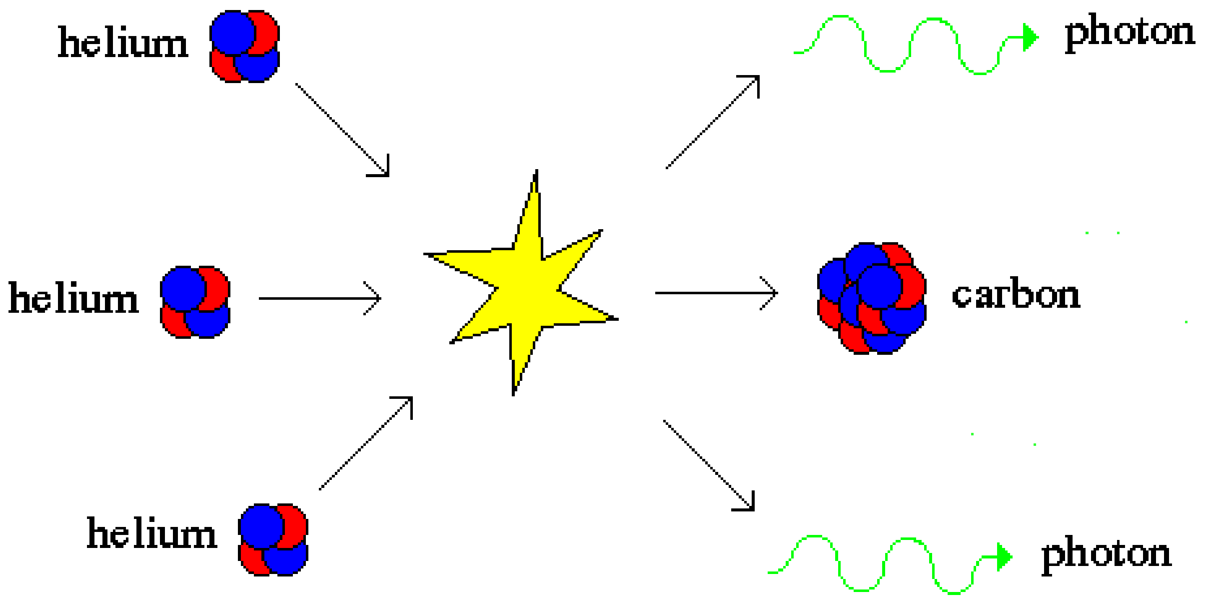
§5.2 氦燃烧 (主序后的红巨星阶段) — $T>10^8$ K

$^4He + {}^4He \rightarrow {}^8Be + \gamma$
$^8Be + {}^4He \rightarrow {}^{12}C + \gamma$

Triple Alpha Process

^{8}Be是非常不稳定的同位素，分裂成两个^{4}He的时标仅为10^{-12} s。但它在分裂前有一定概率再吸收一个α粒子 而转变为^{12}C — 3α 反应

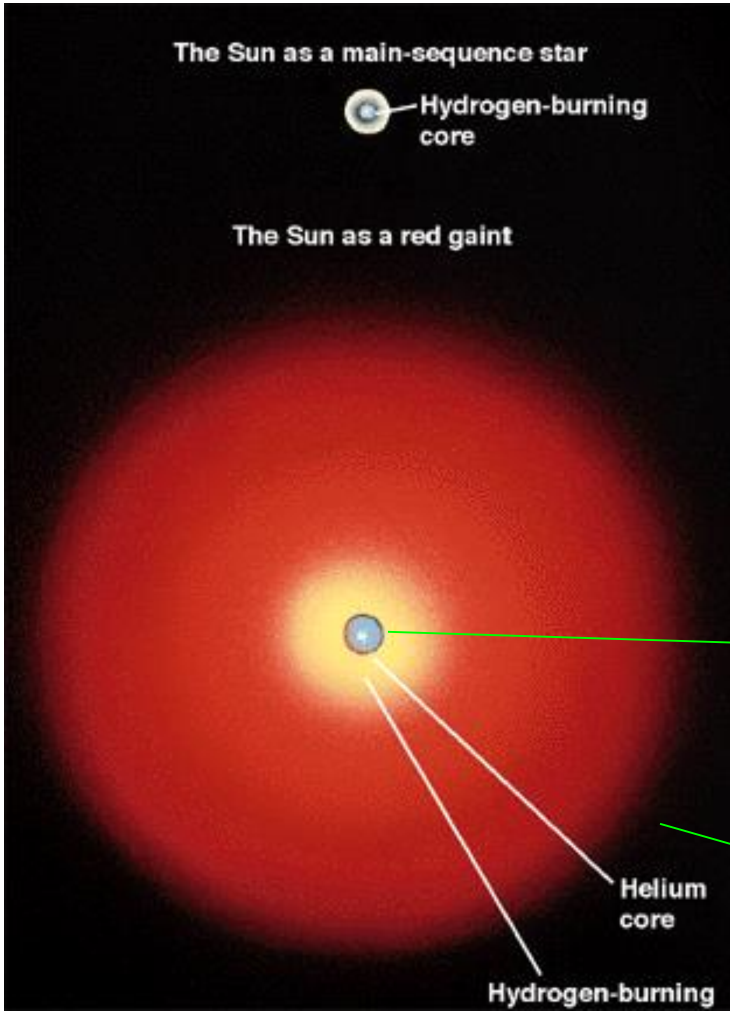
$$^4He_2 + {}^4He_2 + {}^4He_2 \longrightarrow {}^{12}C_6 + \gamma + \gamma$$

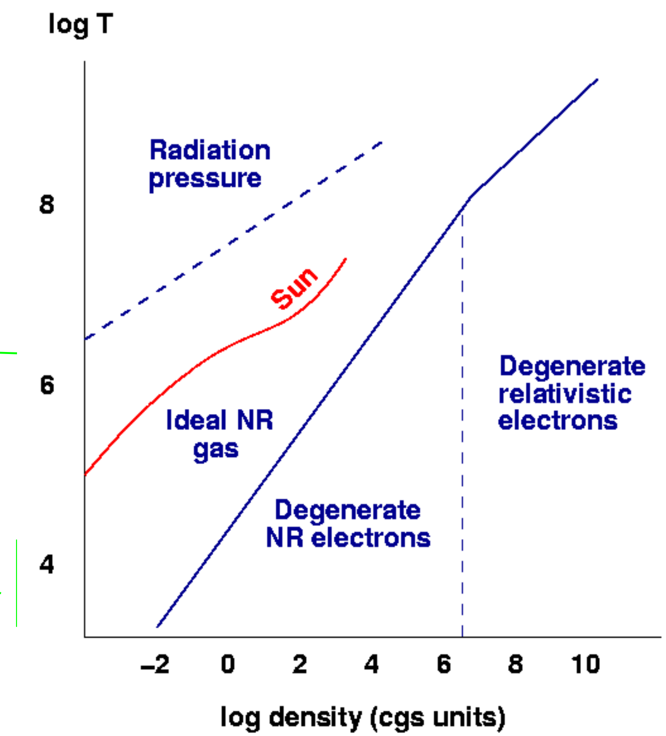


when stellar core temperatures exceed 100 million degrees, the triple alpha process starts where three helium nuclei are fused to form carbon and energy as photons

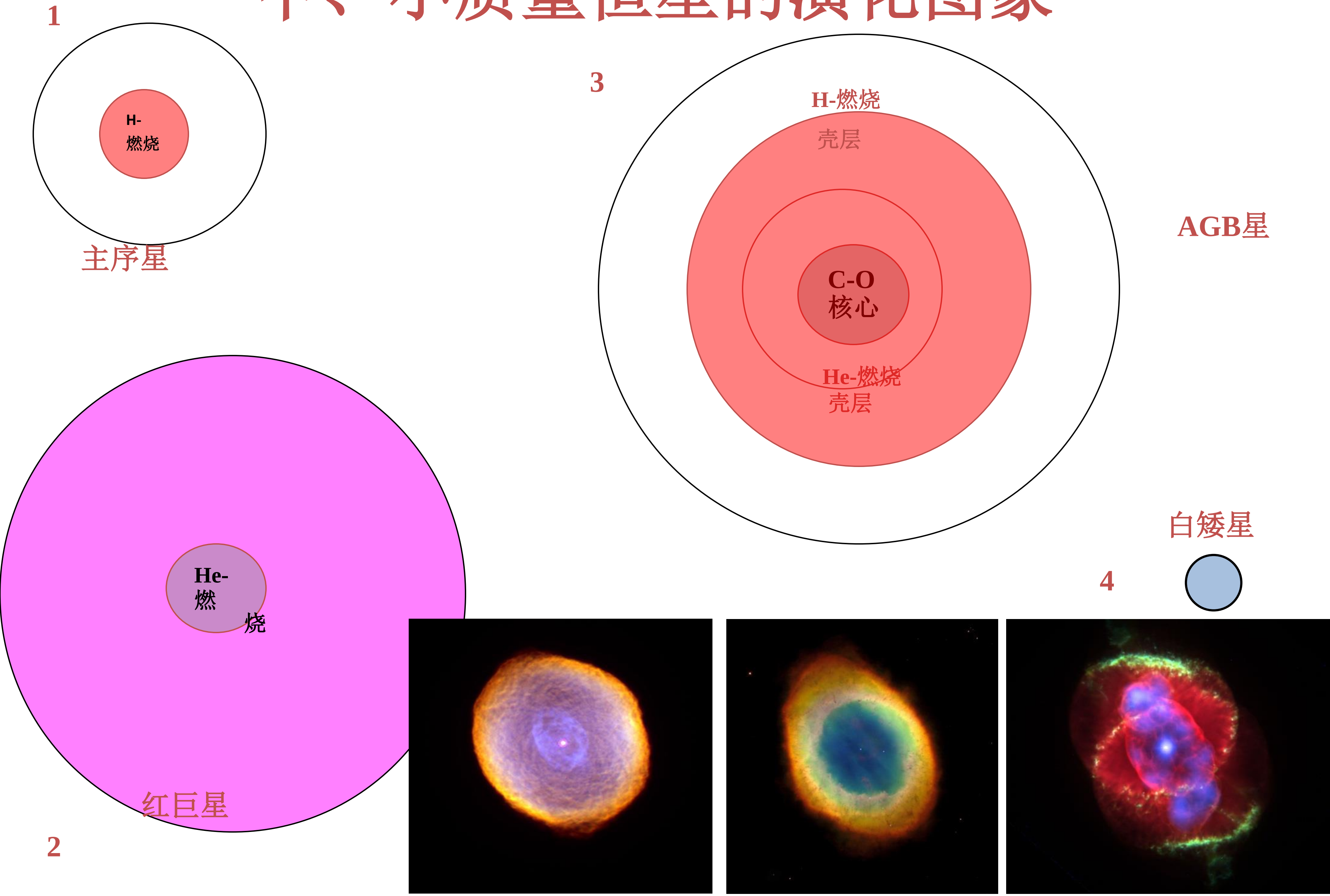
红巨星的结构

当核心温度逐渐升到10^8 K，三alpha反应可以进行，则进入另一个演化阶段。





中、小质量恒星的演化图象



Spirograph nebula

Ring Nebula

Cat’s Eye Nebula

氦燃烧以后恒星内部的核燃烧

碳燃烧: $^{12}C + {}^{12}C$

氖燃烧: 光致碎裂反应导致元素重新组合

氧燃烧: $^{16}O + {}^{16}O$

硅燃烧(硅熔化):光致碎裂反应导致元素重新组合

$\Rightarrow$ 铁族元素的核合成

它们基本上都是由放热核反应组成，作为恒星强大辐射的能源。

恒星内部的平稳核燃烧

核燃烧	核燃料	主要产物	T_{nuc} (^{0}K)	ρ g/cm^3	产能率 $\varepsilon \propto T^n$	释能率 (erg/g)	燃烧时标 (年)
H	^{1}H	^{4}He (^{14}N) (CNO)	(1-2)E7 (PP) >2.0 E7 (CNO)	10^2	T^4 (PP链) (T_7=1.4) $T^{16.7}$ (CNO) (T_7=2.0)	6.4 E 18	1E12(0.2 $M_\odot$) 1.2 E10 (1$M_\odot$) 1 E7(15 $M_\odot$) 1 E5 (50 $M_\odot$)
He	^{4}He	^{12}C (中小质量恒星) ^{16}O (^{22}Ne)	1-3 E8	10^3 - 10^4	T^{40} (T_8=1.0)	^{12}C+^{16}O)	2 E5(T_8=1.3) 4 E3(T_8=1.5) (ρ=1.0E4)
C	^{12}C	$^{20-22}$Ne(^{23}Na) $^{24-26}$Mg(^{27}Al) ^{28}Si	8.8 E8	(1-2) E5	T^{27} (T_9=1.0)	4.0 E17	12 年 (无对流)
Ne	^{20}Ne	^{16}O,^{24}Mg (Mg-P ）	1.5 E9	1 E6	T^{49} (T_9=1.5)	1.1 E17	40 天(无对流) 几年(对流)
O	^{16}O	^{24}Mg-^{32}S (直到铁族元素)	2.1 E9	(3-5) E6	T^{33} (T_9=2.0)	5.0 E17	6 天 (对流)
Si	^{24}Mg-^{32}S	铁族元素	3.5 E9	1 E7	T^{47} (T_9=3.5)	1.9 E17	几小时(无对流) 1 天(对流)

谢谢大家

§6.恒星晚期的热核演化

彭秋和

（南京大学天文系）

恒星内部的平稳核燃烧

核燃烧	核燃料	主要产物	T_{nuc} (^{0}K)	ρ g/cm^3	产能率 $\varepsilon \propto T^n$	释能率 (erg/g)	燃烧时标 (年)
H	^{1}H	^{4}He (^{14}N) (CNO)	(1-2)E7 (PP) >2.0 E7 (CNO)	10^2	T^4 (PP链) (T_7=1.4） $T^{16.7}$ (CNO) (T_7=2.0)	6.4 E 18	1E12(0.2 $M_\odot$) 1.2 E10 (1$M_\odot$) 1 E7(15 $M_\odot$) 1 E5 (50 $M_\odot$)
He	^{4}He	^{12}C (中小质量恒星) ^{16}O (^{22}Ne)	1-3 E8	10^3 - 10^4	T^{40} (T_8=1.0)	^{12}C+^{16}O)	2 E5(T_8=1.3) 4 E3(T_8=1.5) (ρ=1.0E4)
C	^{12}C	$^{20-22}$Ne(^{23}Na) $^{24-26}$Mg(^{27}Al) ^{28}Si	8.8 E8	(1-2) E5	T^{27} (T_9=1.0)	4.0 E17	12 年 (无对流)
Ne	^{20}Ne	^{16}O,^{24}Mg (Mg-P ）	1.5 E9	1 E6	T^{49} (T_9=1.5)	1.1 E17	40 天(无对流) 几年(对流)
O	^{16}O	^{24}Mg-^{32}S (直到铁族元素)	2.1 E9	(3-5) E6	T^{33} (T_9=2.0)	5.0 E17	6 天 (对流)
Si	^{24}Mg- ^{32}S	铁族 元素	3.5 E9	1 E7	T^{47} (T_9=3.5)	1.9 E17	几小时(无对流) 1 天(对流)

影响恒星演化的重要物理因素

一、核燃烧因素
二．星体核心简并性的影响
三．对流作用
四．星体脉动（脉动变星）与AGB星的热脉冲
五、恒星的星风
六、引起恒星核心坍缩的主要物理因素
1) 铁族元素原子核上的电子俘获过程(II型超新星核心)
2) 广义相对论效应(大质量白矮星)
3) 电子对湮灭的中微子发射过程(超巨质量恒星)
4) 高温下重原子核的光致裂解过程(辅助作用)
影响恒星演化研究的三种不确定性因素:
1)热核反应率的不确定性
2)恒星内部(主要在接近表面附近)的对流理论不确定性
3)恒星星风的不确定性

来自核物理的不确定性

粒子热运动能 $E_T \sim kT$ (0.86) $1ev \sim 10^4$k

$1kev \sim 10^7$k

$1Mev \sim 10^{10}$k

太阳内部 $T=1\times 10^7 K \sim E_T \leq 1kev$

超新星爆发前夕: $T \sim 5*10^9 K \sim E_T \leq 0.45MeV$

（恒星：高温）→核物理：低能

热核反应时，E_T作为两个原子核的相对动能、轰击能，去克服库仑位垒。目前核物理实验尚难以进行如此低能核反应，所以反应截面（反应率）均由中，高能实验外推而来，不可靠。

例:He燃烧阶段的关键疑难问题

核反应$^{12}C(\alpha,\gamma)^{16}O$ 的截面???不确定性达到3倍。

$\sigma_{\alpha,\gamma}(^{12}C)$的 截面因子 $S_0=S(E_{eff}=0.3MeV)$

a） 如果选取 S_0 = 0.10 MeV-barn (1975-1988 国际推荐值）

则He燃烧结束后 核产物^{12}C 的丰度超过30%以上，

$M > 8\ M_\odot$ 的中，大质量恒星核心区将会先后发生

C燃烧, Ne燃烧和O 燃烧。

b） 如果选取

S_0 = 0.39 MeV-barn（德国 Müster大学实验测定值）

或 S_0 = 0.28 MeV-barn（美国Caltech研究小组测定值）

则至少对 $M > 20\ M_\odot$ 的大质量恒星，He燃烧之后，^{12}C 的丰度低于8%，在恒星核心收缩的过程中，这些少量的^{12}C将随之而燃烧光，不构成一个单独的核燃烧阶段。也就是说，它将越过C、Ne(它总伴随着C燃烧) 燃烧阶段而直接进入O燃烧阶段。

恒星的中心温度与中心密度

恒星的中心温度则是由恒星整体的宏观性质决定的。一般来说，质量愈大的恒星，其中心温度愈高。例如，对处于稳定氢燃烧阶段的主序星，其中心温度和密度同恒星质量的关系分别为：

$$T_c \propto M^t,$$

t~1/5(上半主序星)
t~ 1/2(下半主序星)

$$\rho_c \propto M^{-\alpha}$$

α~3/2 (上半主序星)
α~1/3 (下半主序星)

太阳： $T_c \sim 1.5\times10^7$ K

质量很大的主序星
(例Wolf-Rayet 星M ~(30-50) $M_\odot$的氢燃烧阶段):
T_c~ (7-9) $\times10^7$ K

点燃核燃烧的条件

热核燃烧点火条件：

$$T_c > T_{nuc}$$

T_c:星体中心温度；　　T_{nuc}:核燃烧的点火温度
热核燃烧的点火温度是由核物理的微观性质来决定的，它可以从入射核的热运动能(考虑隧道效应)大约等于库仑位垒高度的(1-2)×10^{-4}来估算:

$$kT_{nuc} \sim \eta E_{库仑}$$

$$E_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_{nuc}} \approx \frac{Z_1 Z_2}{A^{1/3}} MeV$$

$$(\eta \sim (1-2)\times 10^{-4})$$

点燃核燃烧的恒星质量下限

推论:只有当恒星质量大於某一确定值时

$$M > M_{nuc} \propto [\eta E_{库仑}]^{1/t}$$

它才可能点燃相应的热核燃烧。
随着参与反应的原子核的核电荷增长,其间库仑位垒迅速增加,上式中的M_{nuc}也随之增加。因而,质量不太大的恒星内部只能点燃某些轻核的热核反应而不能点燃较重原子核的核燃烧。也就是说,它们的核燃烧是不完全的。

核燃烧的密度条件(电子简并压强的作用)

热核燃烧尚未开始或熄灭时，星体核心收缩，$T_c\nearrow$，同时$\rho_c\nearrow$，能否达到$T_c \geqq T_{\mathrm{nuc}}$条件。取决于星体核心是否以能够继续收缩。

星体核心继续收缩条件：$\rho_c \leqq \rho_{\mathrm{D}}$

ρ_{D}：电子简并密度（固体状态）

$$\rho_4 >> \rho_D = 2.8 T_8^{3/2}$$

$$\rho_4 = \rho / (10^4 g / cm^3)$$

$$T_8 = T / 10^8 K$$

若$\rho_c >> \rho_{\mathrm{D}}$.电子气体的Fermi(量子)简并压强非常强大,足以抗阻引力收缩,星体不再收缩,T_c不再升高(需考虑中微子发射),(强简并条件),质量小的恒星(主序时ρ_c高),容易达到这一条件这时恒星核心停止热核演化。

结局：白矮星+行星状星

电子简并压强在星体热核演化的重要作用(2)

若$\rho_C \geq \rho_D$，弱(电子)简并状态, $P \sim P_e$

$$P_e = K\rho^{5/3}$$

与T无关，但P_e不够强大，星体核心仍会收缩，

$T_C \nearrow T_{nuc} \rightarrow$ 核燃烧

简并物质内核燃烧是完全不稳定的———失控热核反应。

中小质量恒星的氦闪和碳闪

$0.5m_\odot < m < 2.2m_\odot$, 经历He−闪,

太阳不可避免!!

$2.2m_\odot < m < (5\text{-}6)m_\odot$，不经历He−闪

$(\rho_c < \rho_D)$，平稳He-燃烧

不能点燃C-燃烧

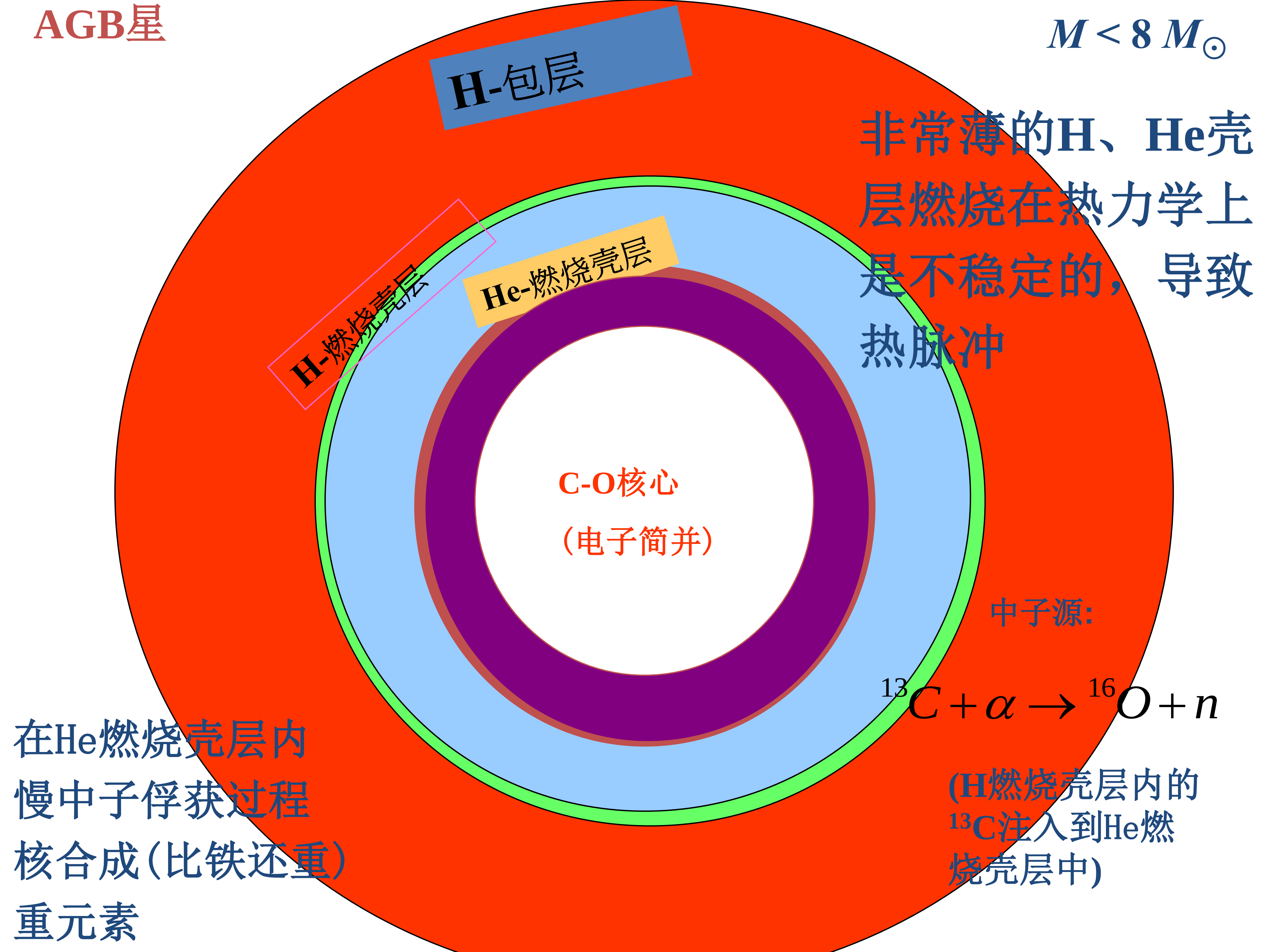
$(5\text{-}6)m_\odot < m < (8\text{-}9)m_\odot$，将出现失控C-燃烧

爆炸性C—燃烧

$m > 8m_\odot$ 点燃平稳C-燃烧 → 超新星

主序后恒星晚期的热核演化

AGB星的演化


AGB星
$M < 8\,M_\odot$
H-包层
非常薄的H、He壳层燃烧在热力学上是不稳定的，导致热脉冲
H-燃烧壳层
He-燃烧壳层
C-O核心
（电子简并）
中子源:
$^{13}C + \alpha \rightarrow {}^{16}O + n$
(H燃烧壳层内的^{13}C注入到He燃烧壳层中)
在He燃烧壳层内慢中子俘获过程核合成(比铁还重)重元素

AGB星及其热脉冲

按照现代恒星演化理论，初始主序质量在（0.5-8）$M_\odot$之间的中小质量恒星，在其核心区经历了氢燃烧与氦燃烧（对于质量在（0.5-2.3）$M_\odot$之间的小质量恒星此时会经历“氦闪”剧烈闪耀过程，然后进入平稳氦燃烧）阶段。当它们核心内的氦基本燃尽之后，一般会形成如下结构：其核心收缩成为具有通常白矮星大小一样的致密的碳、氧简并核，在它的外面通常形成双燃烧壳层：由内向外分别有氦燃烧壳层与氢燃烧壳层（见图13.7.1）。这时恒星进入AGB演化阶段，成为一颗AGB星。刚形成的AGB星，氦燃烧壳层位于星体的深层处，燃烧层并不太薄，这时氢、氧两燃烧壳层的核燃烧仍在平稳地进行。不过，随着燃烧的进程（C—O核心质量增大）它们逐渐向外推移，而且氦燃烧壳层变得愈来愈薄。这时由氢、氦核燃烧释放大量能量，恒星（在氢燃烧壳层外面）的以氢为主的很厚的大气包层因受热向外较迅速地膨胀（表现为星光度增加同时星体表面温度却降低），在HR图上它从AGB分支的初始点（其位置同星体质量以及化学成分密切相关）逐渐朝向右上方的AGB分支最高点演化。

这个阶段AGB星称为处于早期的AGB星（E—AGB）。当它的氢燃烧壳层向外推移到相当程度时（至少对低质量AGB星）。背景温度低于1×10^7K，壳层氢燃烧会熄灭，这时AGB星释放的能量大为减少，星体表面将停止膨胀而转向收缩，HR图上表现为演化途径开始回落。但这时氦燃烧壳层已变得非常薄，它自身物质对辐射能的吸收变得不重要时，由于氦燃烧（3α反应）产能率，对温度的极其敏感性（产能率同温度的40次方成正比），热核燃烧标远远短于自发热膨胀时标，因而非常薄的壳层氦燃烧具有极强的热失控不稳定性。它的温度与产生的光度都极剧上升，不仅将使外围邻近的氢包层底部已经熄灭的壳层氢燃烧再度点燃，而且它（加上死灰复燃的壳层氢燃烧的相助）将使整个大气包层极剧地向外膨胀。星体虽膨胀，但由于光度极剧增加，所以其表面温度几乎没有明显下降，在HR图上它将呈现为沿AGB分支几乎竖直向上（但由于时标远短于AGB阶段的寿命。故难以从观测上发现它）。

星体大气膨胀到相当程度后，不仅外面的壳层氢燃烧因背景温度降到一千万度以下而再次熄灭，甚至连壳层燃烧也随之熄灭。这时星体大气包层因失去内部强辐射压的驱动而在星体自引力作用下开始向中心收缩，星体大气包层底部以内的物质密度与温度随之回升。一旦氦壳层温度超过1亿度，壳层氦燃烧再次点燃。上述失控热不稳定性再次起作用。

失控薄层氦燃烧点燃壳层氢燃烧

→星体大气包层极剧膨胀（光度急剧增长）

→壳层核燃烧熄灭 →大气包层收缩（光度急剧下降）

→再次点燃壳层氦燃烧

这种周而复始几乎循环的过程称为热脉冲。这时的恒星称为处于AGB星的热脉冲阶段（简记为TP-AGB）。

每次热脉冲过程中，其光度，氦燃烧壳层的温度，星体大气包层向外膨胀的速度以及大气包层的半径的脉冲变化幅度随脉冲次数的增加而增大。一般认为，在最初几次热脉冲时，温度变化幅度不够大，由此造成的温度梯度还不至于导致氦燃烧壳层同外部大气包层剧烈的对流。

一旦热脉冲振幅增长到足够大，热脉冲过程中氦燃烧壳层与外部包层巨大的温度梯度导致内外物质急剧对流（对流速度超过包层膨胀速度)，它产生在观测上最重要的影响：它将内部壳层氦燃烧中核心燃烧产物（3α 反应合成的^{12}C和在氦燃烧壳层中通过慢中子俘获过程（S–过程）合成的重元素）借助物质对流而带到大气包层甚至带到恒星表面（这是人们称的“第三次的挖掘”），这就使得人们可以观测到大量的富碳以及重元素超丰的红巨星（例：MS，S、R型星和碳星）的原因。

在内外对流过程中，内部氦燃烧壳层也不断地从外部大气包层补充新的核燃料。特别是，这种内外混合将使氢燃烧壳层中产生的^{13}C不断地进入到内部的氦燃烧壳中去。通过核反应$^{13}C(\alpha, n)^{16}O$而成为S—过程所需要的重要中子源。

TP—AGB星的这种热脉冲周期较长，而其时标以及可经历的热脉冲次数同星体质量密切相关。例如：（初始主序）质量为1.3$M_{\odot}$的 AGB星，其热脉冲周期长达10^5年，大约经历（10-20）次热脉冲之后，大气包层全部丧失而变成白矮星，其抛射的物质在它周围形成一个向外扩张的行星状星云。对于5$M_{\odot}$的AGB星，热脉冲周期大约为（1-3）千年，可能在经历（30-50）次热脉冲后形成（质量较大的）白矮星加上行星状星云。通常认为：TP-AGB星只有在最后几次热脉冲时，由于星体大气包层膨胀幅度（以及膨胀速度）太大，以至于星体自身引力不可能将它们再拉回而呈现为AGB星大量抛射物质，而且随后一次断一次地大量抛射物质，最后物质损失率可达10^{-4} $M_{\odot}$/年。最后一次热脉冲将把星体包层全部抛光，只呈露中心的白矮星（其外层的氢燃烧已熄灭而不再复燃）。

上述AGB星演化图像已得到大量观测上的支持。

质量较大（m＞4$M_\odot$）恒星在HR图水平分支的演化迹一般会形成向左（兰）又向右（红）往返（两次以上）的回路（loop），反复经过HR图上的“造父变星带”，发生脉动现象。大多数周期在（5-10）天，

参与脉动的星体包层质量～（20-40）%。

质量愈大的恒星，处于脉动变量阶段的时标愈短：

$m=5M_\odot$ $\Delta t_{脉}\sim 2.3\times10^6$年

$m\sim 8\ M_\odot$ $\sim 9.3\times10^3$年

$m\sim 1.3M_\odot$ $\Delta\ t_{脉}$（水平分支）～几千万年

小质量恒星在进入HR图水平分支时，呈现脉动周期～0.5（天琴RR和室女W型），不表现为经典造父变星

AGB星热脉冲的振幅逐渐增大，在最后两、三次热脉冲中，振幅变得非常大，其物质向外的功能大于引力束缚能，这最后阶段，AGB星大量抛射物质。经过极巨大的质量损失。星体简并核心暴露出来。形成白矮星，周围被抛射的物质形成行星状星云。

AGB星除了热脉冲和最后大量抛射物质的特征之外，最显著的可直接观测到的特征就是许多处于AGB阶段红巨星的表面可观测到反常丰富的重金属（原子量A＞60），例如Ba,Sr,Zr等，有的M，MS（光谱）型恒星表面还发现半衰期短于一百万年的放射性元素TC。多数AGB星表面发现碳元素丰度明显地超丰（此丰度明显高于太阳系值），90年代初人们还发现有的AGB星表面存在着反常丰富的氟。这一系列观测事实都表明不仅AGB星内部（实际是在氦燃烧壳层和氢燃烧壳层）核心燃烧过程不断地核合成。而且通过内外物质对流将核合成的产物输送到恒星表面。在氦燃烧壳层中，氦燃烧过程（3α反应）不断合成^{12}C。而原来氢燃烧过程中产生的^{14}N在氦燃烧中转化为^{22}Ne，它可成为大质量恒星内的一种中子源。（$^{22}Ne+\alpha \rightarrow ^{25}Mg+n$），此外，在氢燃烧壳层中产生的$^{13}C$，在氢、氦燃烧壳层接近过程中会发生混合，使$^{13}C$进入氦燃烧壳层，在小质量恒星内部它是最重要的中子源（$^{13}C+\alpha \rightarrow ^{16}O+n$），这些中子源提供相当数量的自由中子，使氦燃烧壳层内不断地进行慢中子俘获过程（S—过程）而合成

A＞60的重元素

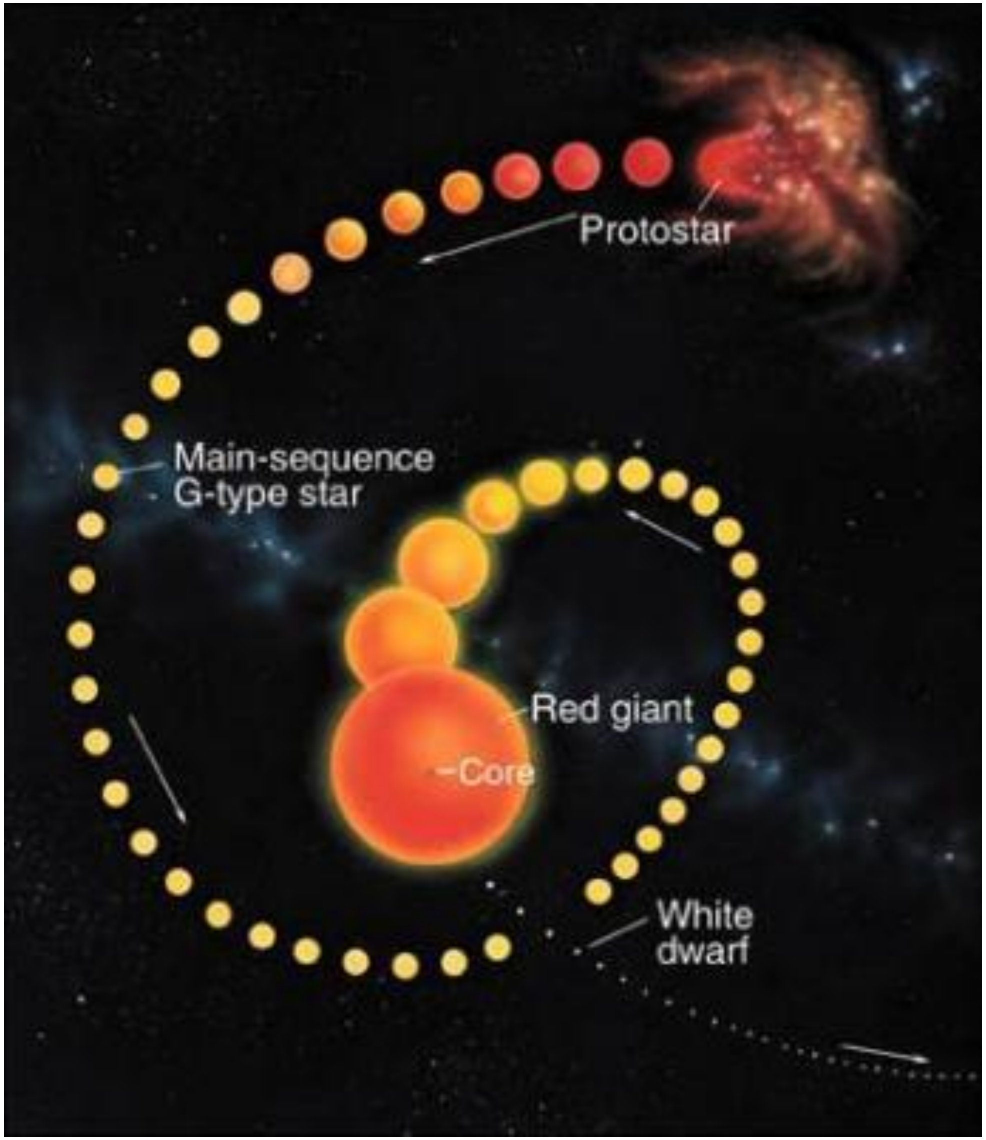
白矮星的形成

当初始质量小于 8 $M_\odot$ 的恒星演化到红巨星时候，会形成AGB星(具有C、O(电子)简并核心和非常薄的He、H 燃烧壳层(热力学上不稳定)，历经若干次热脉冲

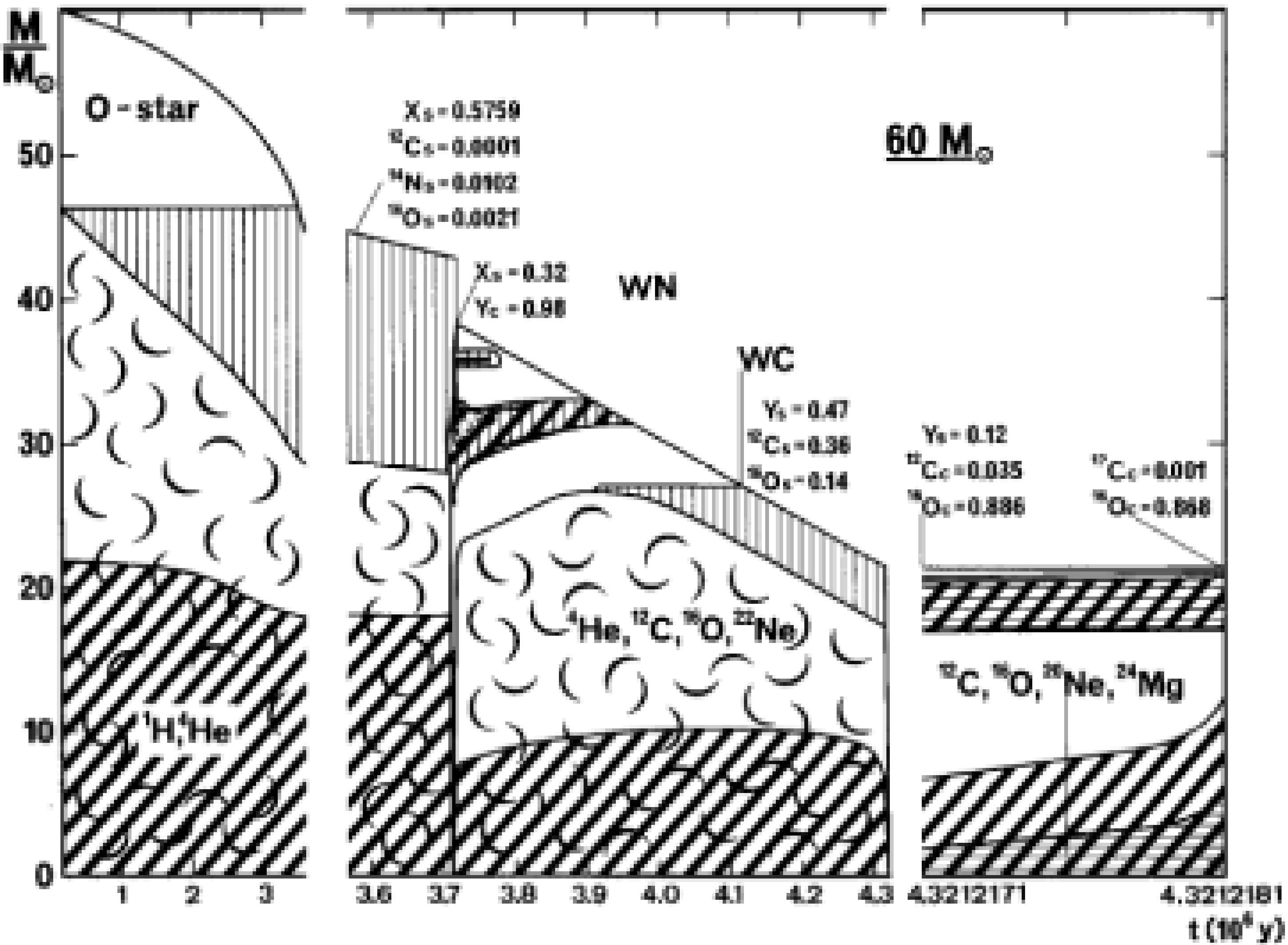
(M<3$M_\odot$恒星，热脉冲周期为几十万年;总共经历十余次热脉冲;

M>5$M_\odot$恒星， 热脉冲周期为几千年;总共可经历几十次热脉冲)

最后三次热脉冲，其包层被抛射出去形成行星状星云，而其核心就形成碳、氧白矮星。



质量非常大恒星内部的核燃烧



核燃烧与核合成

（A，Z）大，T_{nuc}↗， 聚变放热反应一核能源

核燃烧次序：H-，He-，C-，Ne-，O-，Si一燃烧
(较轻原子核反应合成较重原子核, 提供后阶段的核燃烧)

随着参与反应的原子核的核电荷增长, 其间库仑位垒迅速增加，上式中的　也随之增加。 因而，质量不太大的恒星内部只能点燃某些轻核的热核反应而不能点燃较重原子核的核燃烧。即:小质量的恒星难以点燃后继的热核反应也就是说，它们的核燃烧是不完全的。

大质量恒星内部氦燃烧的核燃烧

碳燃烧：　$^{12}C + {}^{12}C$

氖燃烧：　光致碎裂反应导致元素重新组合

氧燃烧：　$^{16}O + {}^{16}O$

硅燃烧(硅熔化)：光致碎裂反应导致元素重新组合

$\Rightarrow$ 铁族元素的核合成

它们基本上都是由放热核反应组成，作为恒星强大辐射的能源。

Fe一核心为核燃烧的终点，$\because$需要T_{nuc}太高，当 $T \leq T_{nuc}(Fe)$时，热光子能量（$E_{\gamma_0} \sim kT$）很高，Planck分布的高能光子$E_{\gamma_0} \geqq 8.8MeV$,

将把 Fe 核打碎(核裂解为α，p，n)，吸热反应。

将加速星体塌坍, 导致超新星爆发。

各种质量恒星演化的归宿

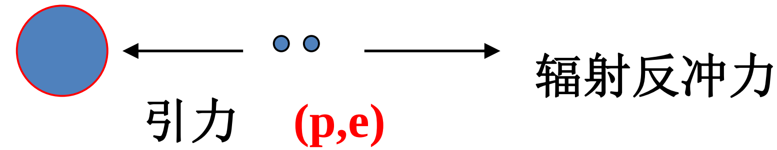
例：$m \leqq 0.07m_{\odot}$,   不能点燃H−燃烧,
褐矮星(Brown dwarf)

$0.07m_{\odot} < m \leqq 0.5m_{\odot}$, 不能点燃He−燃烧,
He−白矮星+行星状星云

$0.5m_{\odot} < m < 8m_{\odot}$ 不能点燃平稳C−燃烧；
C-O白矮星+ 行星状星云（已发现几十万）

$m > 8m_{\odot}$ 点燃平稳C−燃烧=>超新星

Eddington（光度）极限



星体光度: L

在r处从单位面积向外的辐射流量 $\dfrac{L}{4\pi r^2}$

单位时间在单位体积内物质吸收的能量 $\dfrac{\kappa\rho L}{4\pi r^2}$

(&;:质量不透明度)

单位时间内相应吸收的动量(辐射反冲力)为 $\dfrac{1}{c}\dfrac{\kappa\rho L}{4\pi r^2}$

对稳定的天体:

辐射反冲力 < 引力 $\dfrac{GM\rho}{r^2}$ $\rightarrow$ $\dfrac{\kappa\rho L}{4\pi r^2 c} < \dfrac{GM\rho}{r^2}$

$$\rightarrow \qquad L = L_{Edd} = \frac{4\pi cGM}{\kappa}$$

星体外围为氢原子(质子+电子), 设不透明度为电子的Thomson散射

$$\kappa = N_A\sigma_T = \sigma_T / m_p \qquad \sigma_T = 0.625\times10^{-24}cm^2 = 0.625 \quad bar$$

$$L_{Edd} = \frac{4\pi cGMm_p}{\sigma_T} = 1.3\times10^{38}\frac{M}{M_{Sun}} \quad erg/s$$

LBV星（高光度兰变星Luminous Blue Variable）

HR图上恒星光度分布的上限: Eddington 光度

测光和分光研究发现: 稳定恒星的最大质量:

$M > 100\ M_\odot$

（LMC中的Melnick 42, 可能 $M \sim 150\ M_\odot$

$$L_{Edd} = \frac{4\pi cGM}{\kappa}$$

Z 较低的恒星，外层κ 较低，在HR图上Eddington谷的位置较高。

Eddington谷阻止质量非常大的恒星向HR图的红端演化。

光度上限应由其演化迹正好从ET下面通过的恒星光度确定。

由于ET的位置同Z相关，红超巨星的光度不能作为理想的标准烛光。

LBV星: 光学上最亮的兰超巨星

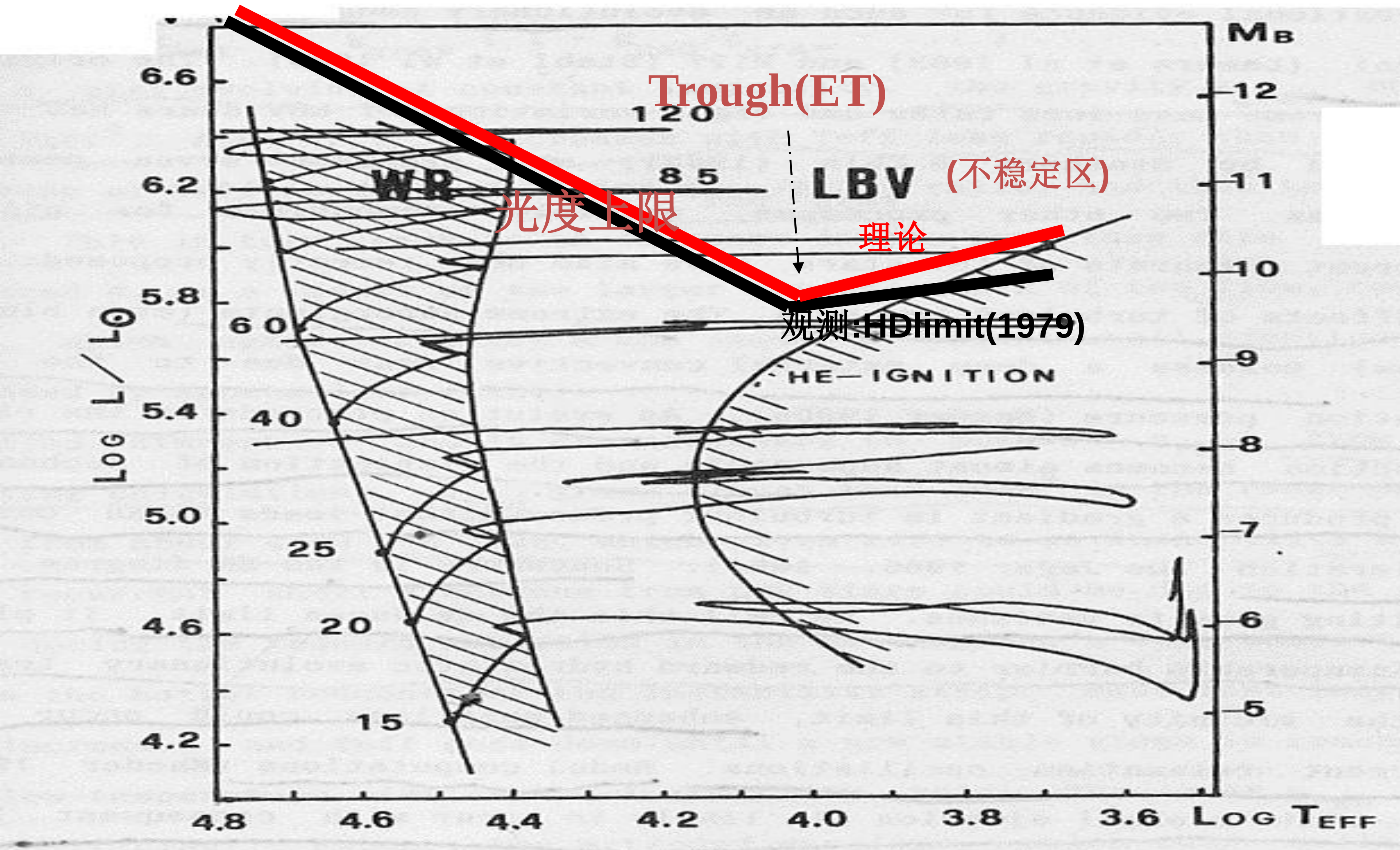
hypergiants 或Hubble-Sandage变星.

例: S Dor(剑鱼座), 显示了剧烈而不规则的爆发现象。

$$\dot{M} \sim 10^{-3} M_{Sun} / yr.$$

在HR图上, 它们一直延伸到较低T_{eff} 区域 — **Cool hypergiants**

各种质量大质量星在HR图上的演化迹



大质量恒星演化

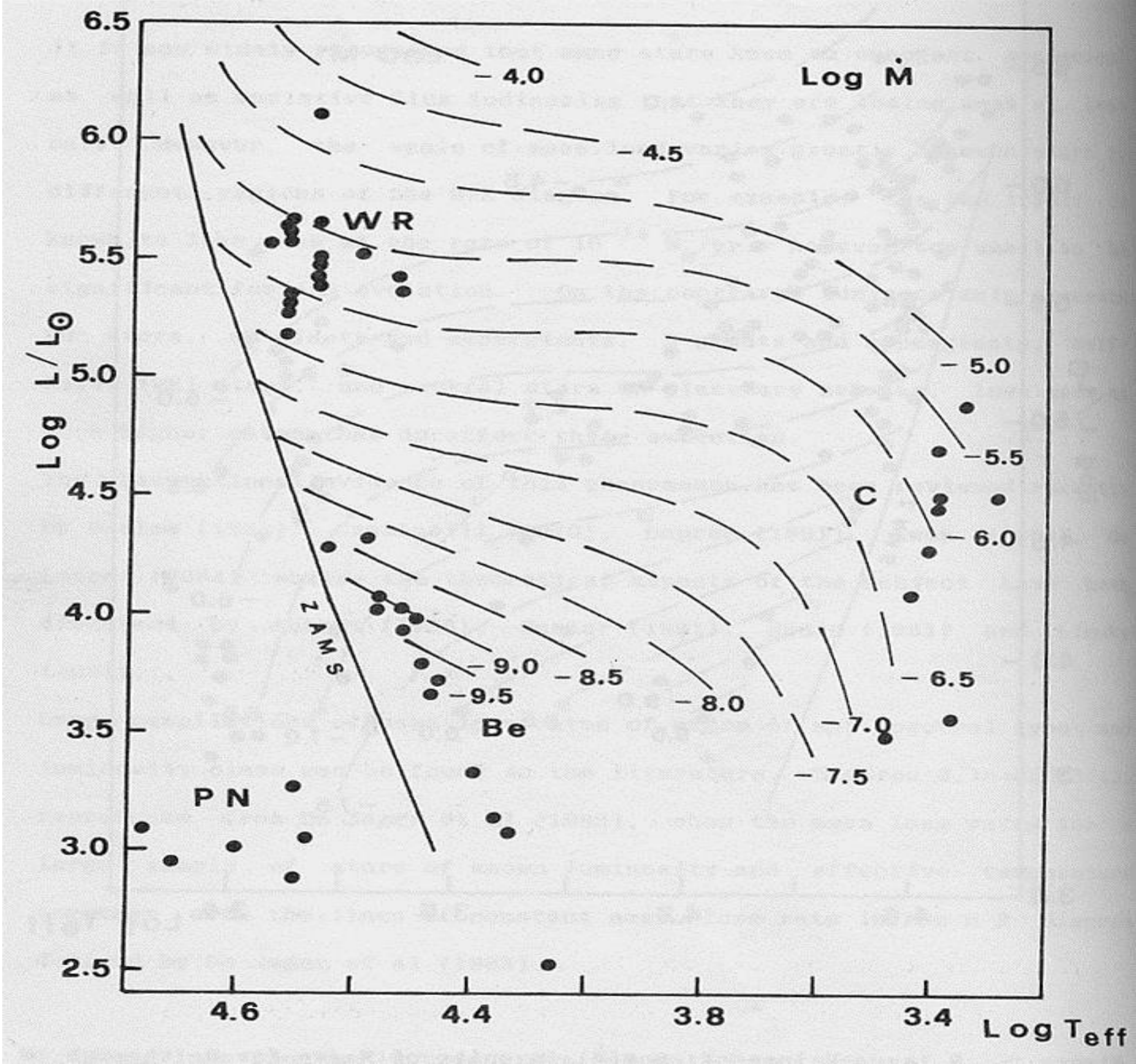
for Population I stars ($Z \sim 0.02$):

- $M \lesssim 15\ M_\odot$ MS (OB) $\rightarrow$ RSG ($\rightarrow$ blue loop? $\rightarrow$ RSG) $\rightarrow$ SN II
  mass loss relatively unimportant
- $M \lesssim 25\ M_\odot$ MS (O) $\rightarrow$ BSG $\rightarrow$ RSG (with strong $\dot{M}$) $\rightarrow$ SN II
- $M \lesssim 40\ M_\odot$ MS (O) $\rightarrow$ BSG $\rightarrow$ RSG $\rightarrow$ WR $\rightarrow$ SN Ib
- $M \gtrsim 40\ M_\odot$ MS (O) $\rightarrow$ BSG $\rightarrow$ LBV $\rightarrow$ WR $\rightarrow$ SN Ib/c

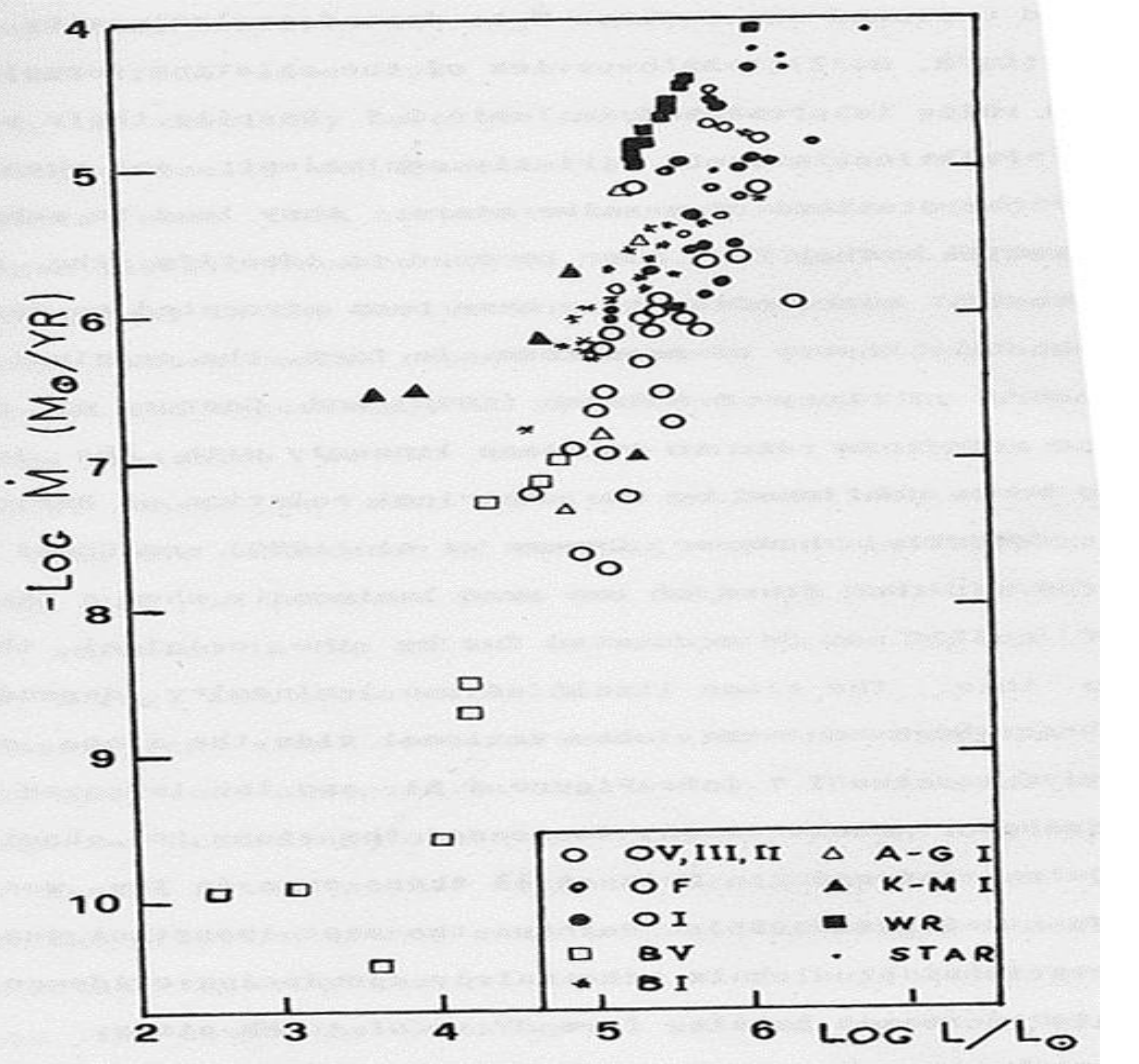
increased $\dot{M}$ as $M \uparrow \Rightarrow$ convergence of final (pre-SN) masses to $\sim 5 \ldots 10\ M_\odot$

HR图上不同恒星的星风

(dM/dt: $M_\odot$/yr)



星风损失率同恒星光度间的关系



超新星核心坍缩的关键过程

大质量恒星核心坍缩的主要原因

电子俘获过程 ：引起 超新星核心坍缩的关键过程

$$(Z,A)+e^{-}\rightarrow(Z-1,A)+\nu_e$$

$$E_F^{(EC)}>Q_{EC}(Z,A)$$

$$\rho_c>\rho_{EC}=1.952\times10^{6}(\mu_e/2)[(\frac{Q_{EC}(A,Z)}{m_e c^2})^2-1]^{3/2}g/cm^3$$

Q_{EC} (A,Z): 原子核（A, Z）电子俘获的能阈值

重要原子核电子俘获的密度阈值

	^{4}He	^{12}C	^{16}O	^{20}Ne	^{28}Si	^{56}Fe
EC 过程	$\rightarrow {}^{3}H + n$ $\rightarrow 4n$	$\rightarrow {}^{12}B$ $\rightarrow {}^{12}Be$	$\rightarrow {}^{16}N$ $\rightarrow {}^{16}C$	$\rightarrow {}^{20}F$ $\rightarrow {}^{20}O$	$\rightarrow {}^{28}Al$ $\rightarrow {}^{28}Mg$	$\rightarrow {}^{56}Mn$ $\rightarrow {}^{56}Cr$
Q'_{EC} (MeV)	20.596	13.370	10.419	7.026	4.643	3.695
ρ_{EC} (g/cm^{3})	1.37×10^{11}	3.90×10^{10}	1.90×10^{10}	6.21×10^{9}	1.97×10^{9}	1.14×10^{9}

表中EC过程的能阈值已扣除电子的静止能量

广义相对论引力坍缩的临界密度

大质量白矮星(相对论性电子简并压强占主导)的坍缩条件:

$$M_{core} > M_{ch} = 5.84 Y_e^2 M_{Sun}$$

$$\rho_c^{(GR)} > 2.6 \times 10^{10} g / cm^3$$

超巨质量恒星($M/M_{\odot}$ >100, 包括活动星系核中心超巨质量天体,辐射压强占主导)坍缩的临界密度条件:

$$\rho_{crit} = 1.996 \times 10^{18} (M/M_{\Theta})^{-7/2}$$

ρ_c(GR) 同 ρ_{EC} 的比较，结论：

⇒ 引起SNII(SNI$_b$、SNI$_c$)核心坍缩的首要物理因素是电子俘获过程(EC)。

⇒ 引起吸积白矮星坍缩(它导致SNI$_a$ 爆发)的主要因素是广义相对论效应。

⇒ (γ光子致使铁原子核碎裂反应只是辅助因素)

⇒ 导致超巨质量恒星坍缩的主要因素是电子对湮灭为中微子对过程

$$\gamma+\gamma \leftrightarrow e^{+}+e^{-} \rightarrow \nu+\bar{\nu} \qquad \frac{\sigma(e^{+}+e^{-} \rightarrow \gamma+\gamma)}{\sigma(e^{+}+e^{-} \rightarrow \nu+\bar{\nu})} \sim 10^{-19}$$

(条件：电子处于非简并状态)

$$\rho_4 < \rho_D = 2.8 T_8^{3/2}$$

爆炸性核燃烧条件

1) 热核燃烧的速率非常快，以致于热核燃烧的时标(τ_{nuc})短于星体因自引力作用(忽略压强)的自由坍缩时标(τ_{ff})

$$\tau_{nuc} < \tau_{ff} \qquad \tau_{ff} \sim 446\rho^{-1/2}$$

$$\tau_{nuc}(1,2) = [N_2 < \sigma v >_{1,2}]^{-1}$$

2) 在时标 τ_{nuc} 内热核燃烧所释放的总能量必须超过星体本身的自引力束缚能

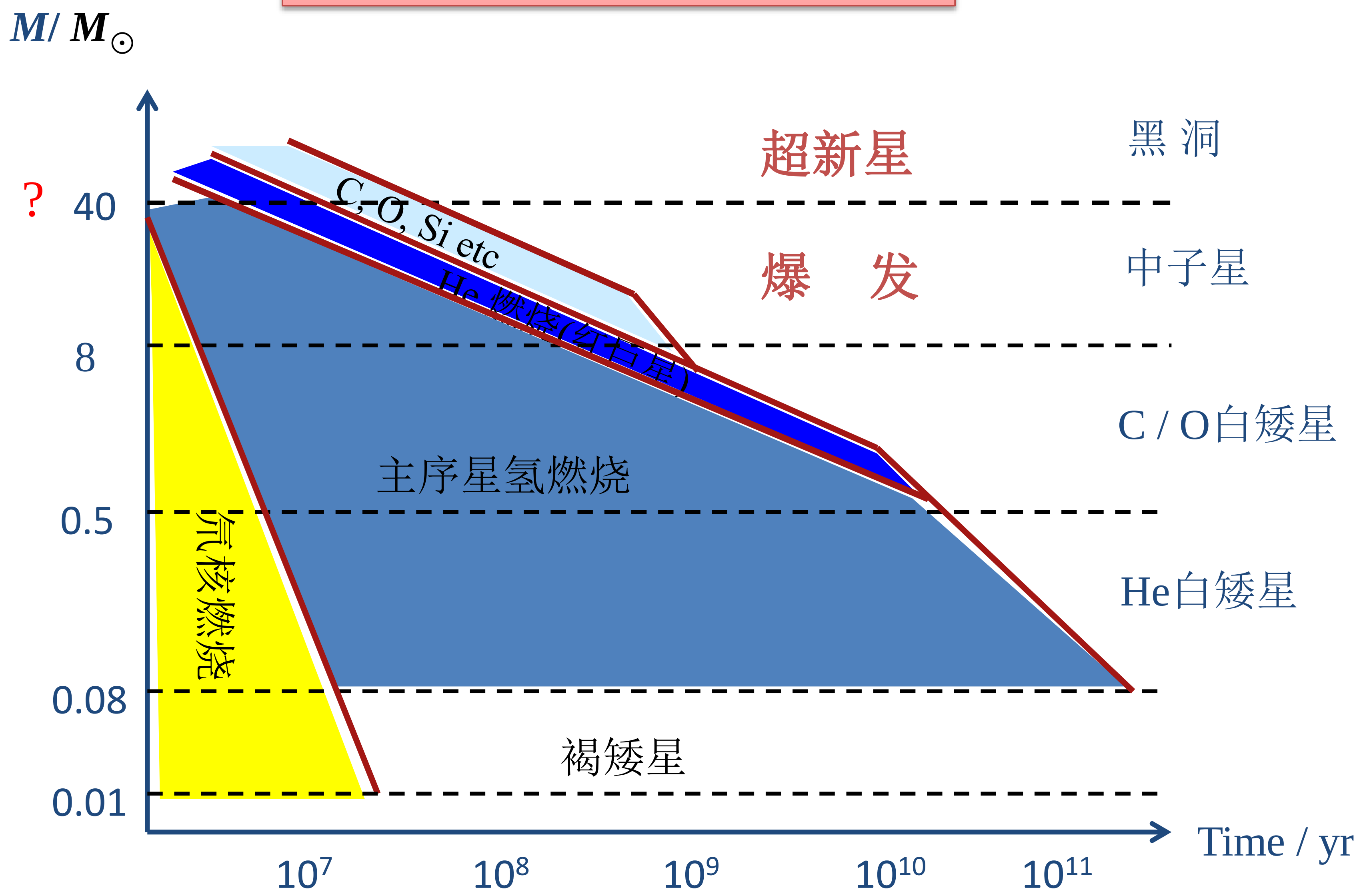
$$E_{nuc} = \frac{d\varepsilon_{nuc}}{dt} \cdot \tau_{nuc} \cdot M_{core} > \left|\Omega_{引力}\right| \sim \frac{GM^2}{R}$$

$d\varepsilon_{nuc}/dt$ 核燃烧单位质量物质在1秒钟内释放的核能

不同质量恒星的演化和归宿

	$M / M_{\odot}$			最后归宿
质量非常小恒 星	< 0.07	无核燃烧; 引力收缩,引力势能转化为辐射能	以红外辐射和红光为主 (褐矮星)	
中小质量恒 星	0.07 — 8	经历 H、He 燃烧	恒星会经历急剧膨胀和热脉冲	白矮星 + 行星状星云
大质量恒 星	8 — 25	经历H, He, C, Ne, O, Si 等各燃烧阶段	超新星爆发	中子星(脉冲星) + 超新星遗迹
质量非常大恒星	> 30	经历H, He, C, Ne, O, Si 等各燃烧阶段	超新星爆发	黑洞?

不同质量恒星的演化



M/ M⊙
?
40
8
0.5
0.08
0.01
C, O, Si etc
He 燃烧(红巨星)
超新星
爆 发
黑 洞
中子星
C / O白矮星
He白矮星
主序星氢燃烧
氘核燃烧
褐矮星
Time / yr
10^7
10^8
10^9
10^{10}
10^{11}

恒星演化通常要经历：

核心氢燃烧的主序星阶段(*Main Sequence*)

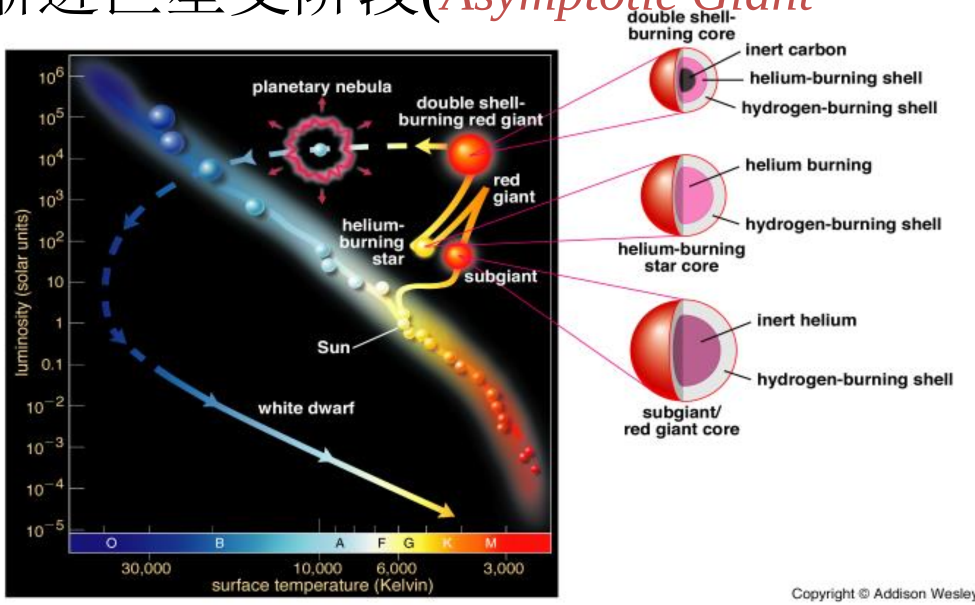
核心氢燃烧枯竭后的红巨星阶段(*Red Giant Branch*)

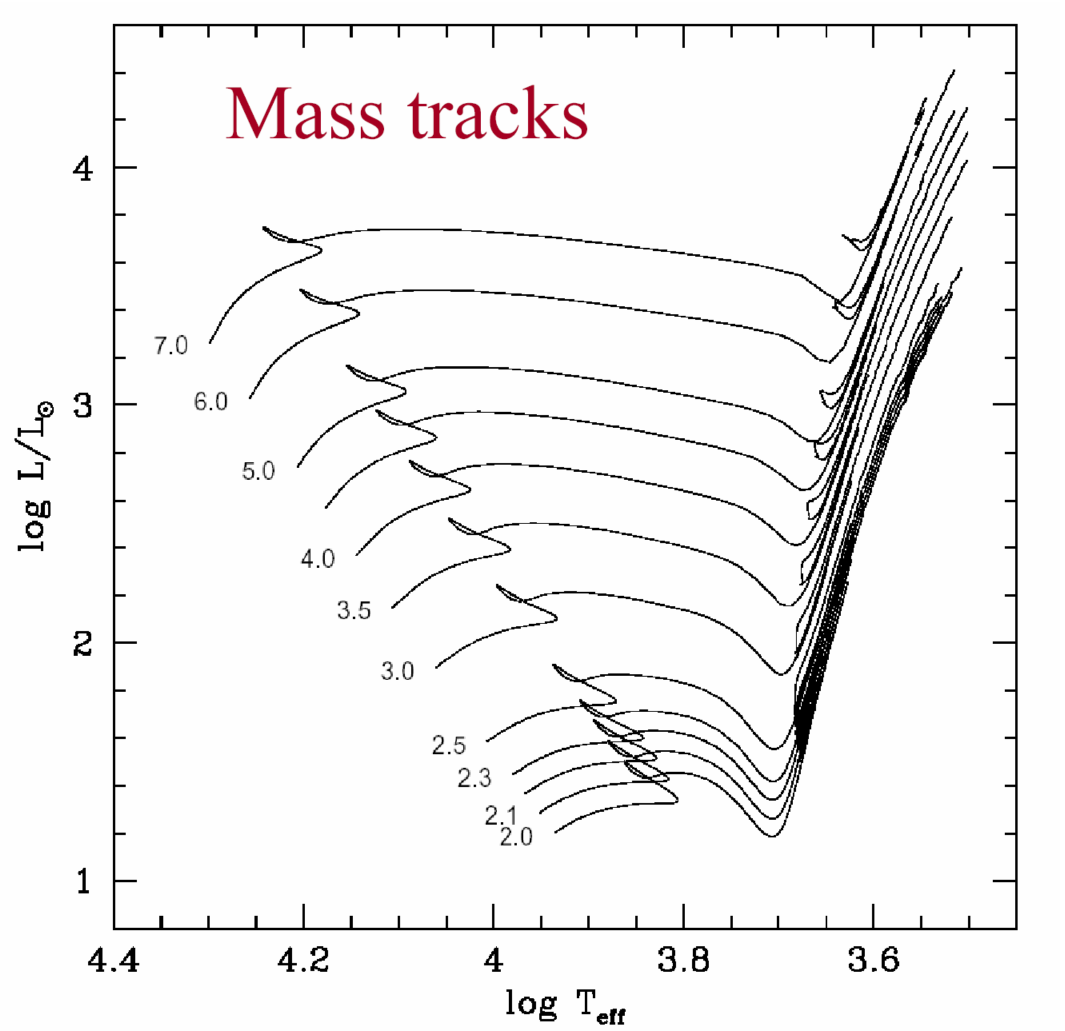
经历氦闪或不经历氦闪进入核心氦燃烧的水平支阶段 (*He core flash* and *Horizontal Branch*)

核心氦燃烧枯竭后的渐进巨星支阶段(*Asymptotic Giant Branch*)

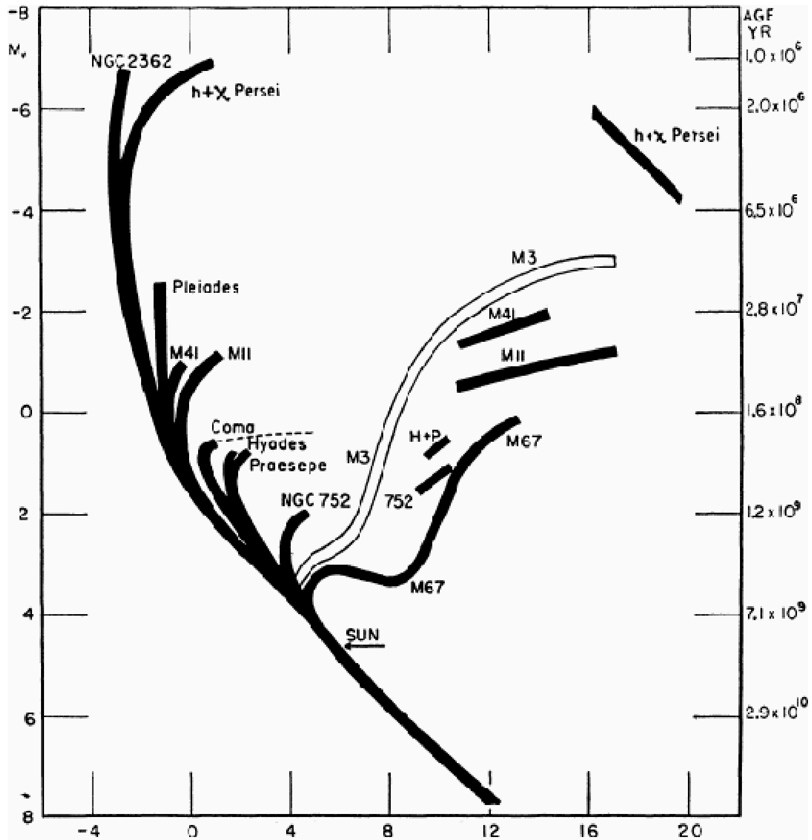
热脉冲形成行星状星云和白矮星；或者进入碳主序

大质量恒星形成洋葱结构





质量越大的恒星寿命越短，越早脱离主序。



赫罗图脱离主序的位置对应星团的年龄。

小质量恒星的演化

	$m(M/M_{\odot})$	主序阶段	核燃烧	AGB星	核合成	最后演化	归宿
非常小 质量 星	< 0.07		不能点燃 H燃烧	Tc<1.0⑨ 10^7 K	□$_c$>10^3 g/cm^3		褐矮 星
小 质 量 恒 星	0.07 —— 0.5 1.1 下半主 序星: m⊙1.1)	下半主序 PP链氢燃烧 光度低 T_c, T_e低 无对流核 薄的表面 对流区 主序时标 >10^9年; He燃烧阶 段，外部对 流区向内延 伸很深 L✪ M^2	m <0.5: 不能点燃 He燃烧 —— 0.5 < m < 2.2 以He闪方 式点燃He 燃烧 He燃烧结 束后演变 为红巨星	强(电子) 简并核心 —— C-O(电 子)简并 核心外围 出现很薄 的He壳 层燃烧和 H壳层燃 烧，呈现 热脉冲不 稳定性 (AGB星)	—— $^{13}C(\alpha,n)^{16}O$ 为中子源， 在He壳层燃 烧中通过慢 中子俘获过 程(以Fe为 种子核)合 成(A>70)的 重元素	演化时标 >10^{12}年 —— m<3: AGB 星热脉冲 周期10^5年。 热脉冲振幅 逐次增长 (经历十多 次后)最后 两三次热脉 冲将星体包 层抛出	He 白矮星 + 行星 状星云 —— C-O 白矮星 + 行星状 星云

中大质量恒星的演化

	m($M/M_\odot$)	主序阶段	核燃烧	AGB星	核合成	最后演化	归宿
中等质量恒星	2.2 (5-6) 8	上半主序 CNO循环 光度高 T_c, T_e高 对流核心无 表面对流区 主序<10^9年 质光关系: $L \propto M^4$	平稳地 点燃He 燃烧, 不出现 He闪; 当m<8: 不能点 燃C燃烧	大质量AGB 星，呈现热 脉冲不稳定 性。 (m>5): m_c(C-O) m_{ch}~1.4	(同上) 区别: (m>5) 以^{22}Ne 为慢中 子俘获 过程的 重要中 子源	大质量(m>5) AGB星的热脉 冲周期约(1- 2)⑨$10^3$年。 它们至少要 经历二，三 十次脉冲之 后才最后把 星体包层全 部抛光。	C-O白 矮星+行 星状星 云;密近 双星的 大质量 白矮星 是SNIa 前身星
准大质量恒星	8 12	上半主序	m =8-9: (电子) 弱简并 C-O核 心内会 出现 C闪	m =9-10:经 历平稳C燃 烧;出现电 子简并的Ne 核心，并出 现失控的Ne 燃烧(Ne闪)	m =10-12 经历平稳的 C,Ne燃烧, 后进入O燃 烧阶段可能 引起爆炸性 O燃烧	C闪, Ne闪 与爆炸性 O燃烧有 可能导致 整个星体 爆炸	超新星 (?) (情形 复杂)

大质量恒星的演化

m =	(M/M⊙)	上半主序	核燃烧	内部	状况	最后演化	归宿
质量较大恒星	12 - 25	SNII 前身星 标准模型	经历所有可能的核燃烧 ⇓铁核心	m_c~1.13 ρ_c>(3-5) 10^9g/cm^3 T_c>5 10^9K	当 ρ_c>1.14×10^9g/cm^3 ⇓	铁核心的电子俘获过程导致星体核心坍缩	SNII爆发 核心坍缩 形成 中子星
质量很大恒星	30 - (70 -80)	Tc~(7-9)10^7K 主序阶段强大星风形成 WR星, 在此处键入公式 (4-6)M⊙	辐射压占相当比例经历高光度兰变星阶段，星体包层通过星风抛射到太空。	He燃烧的核产物以^{16}O为主 ^{12}C的含量可能低于8% ⇓	He燃烧后恒星可能越过C, Ne燃烧而直接进入O燃烧阶段	电子俘获过程引起铁核心坍缩, 导致超新星爆发	SNI$_b$ + 中心 残骸 (黑洞?)
质量特大恒星	> 100	辐射压主导; 广义相对论效应引起星体坍缩;恒星大量抛射物质	在坍缩过程中发生(高温)H, He燃烧呈现强烈脉动不稳定性	He燃烧后直接进入O燃烧阶段 T_c¤2⑨$10^9$ K	可能发生爆炸性O燃烧； 电子对湮灭和广义相对论效应导致星体坍缩	寿命短于 5 ⑨ 10^4 年	直接 坍缩 黑洞

谢谢大家

§6. 重元素的核合成

He燃烧阶段的关键疑难问题

核反应$^{12}C(\alpha,\gamma)^{16}O$ 的截面???不确定性达到3倍。

$\sigma_{\alpha,\gamma}(^{12}C)$的 截面因子 $S_0S(E_{eff}=0.3MeV)$

a) 如果选取 S_0 = 0.10 MeV-barn (1975-1988 国际推荐值)则He燃烧结束后 核产物^{12}C 的丰度超过30%以上，

M > 8 $M_\odot$ 的中，大质量恒星核心区将会先后发生 C燃烧，Ne燃烧和O 燃烧。

b) 如果选取

S_0 = 0.39 MeV-barn (德国 Mster大学实验测定值)

或 S_0 = 0.28 MeV-barn (美国Caltech研究小组测定值)

则至少对 M > 20 $M_\odot$ 的大质量恒星，He燃烧之后，^{12}C 的丰度低于8%，在恒星核心收缩的过程中，这些少量的^{12}C将随之而燃烧光，不构成一个单独的核燃烧阶段。也就是说，它将越过C，Ne(它总伴随着C燃烧)燃烧阶段而直接进入O燃烧阶段。

硅燃烧核合成的主要特征:

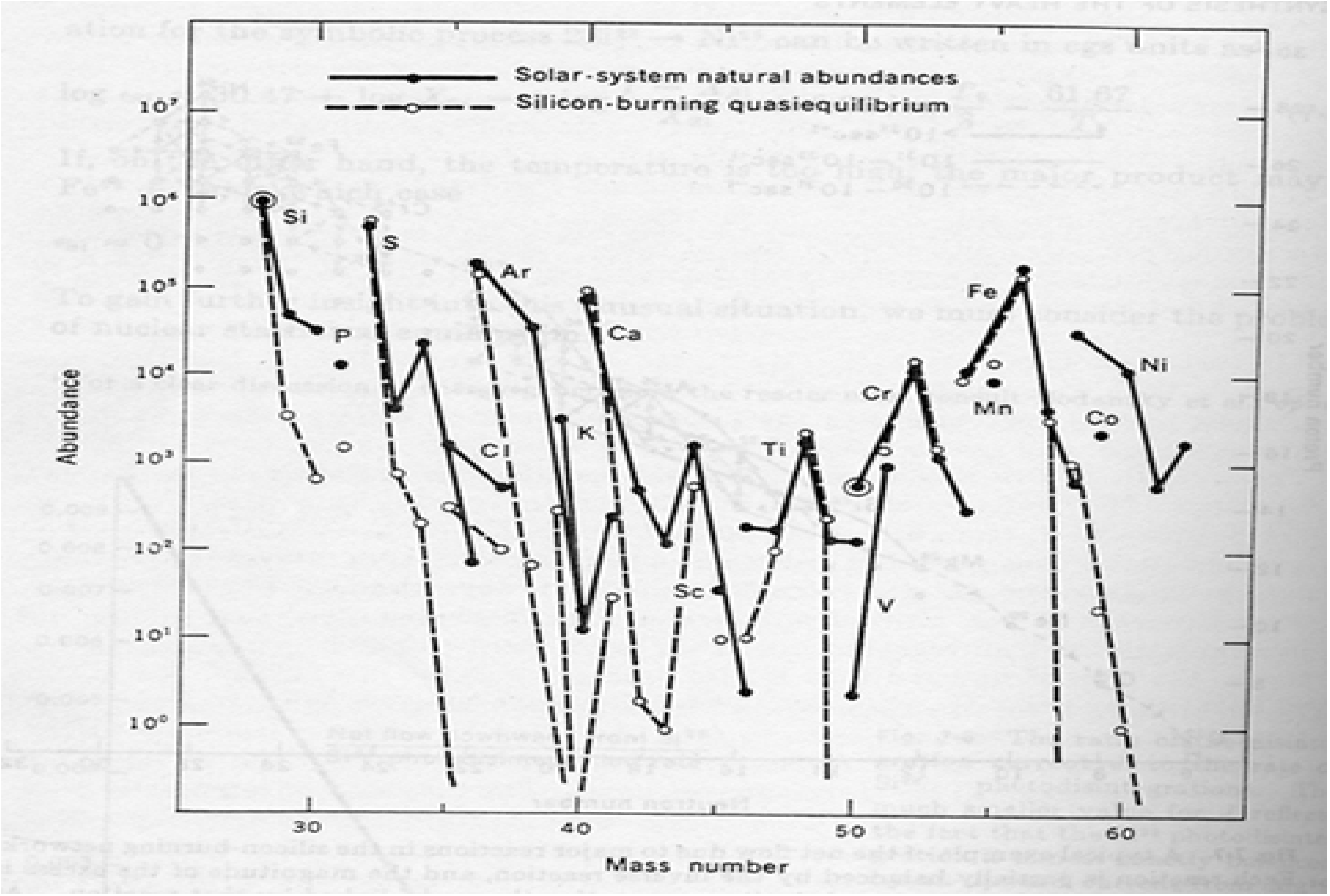
1) 从^{24}Mg – ^{40}Ca 之间，元素丰度以各个 α-核 (即由α粒子整数倍组成的原子核)为主

2) 45 < A < 50 之间的元素丰度都较低 (达“极 小”)

3) 元素丰度曲线在铁族元素处出现峰值。

经过完全硅燃烧之后，物质达到e-平衡(原子核之间达到热统计衡),各核素之间的相对丰度由核统计平衡的Saha公式来确定。在温度不太高($T < 5\times10^9$ K)环境下，它们主要由该原子核的结合能来决定

Si燃烧结束时核素丰度 (T_9=4.2, t=10sec , 残存X(Si)=32%)



带电原子核之间热核反应极限

比铁族元素更重的核素 (A>70)是不可能通过荷电粒子之间的聚变核反应来合成的。这是因为带正电的原子核之间的Coulomb 排斥位垒高度正比于两碰撞核的核电荷的乘积:

$$E_{库仑} \sim \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_{nuc}} \sim 20 \frac{Z_1 Z_2}{A^{1/3}} MeV$$

×

当靶核超过铁族元素时，为了克服如此强大的Coulomb排斥位垒，星体中心温度必须超过1×10^{10} K ，而在如此高温下，按Planck分布的高能 γ 光子早就把原子核打碎了。即光致裂变反应更为有效地 阻止更重核素的合成。它们只能通过中子俘获过程(不存在Coulomb排斥位垒的阻碍)来形成。

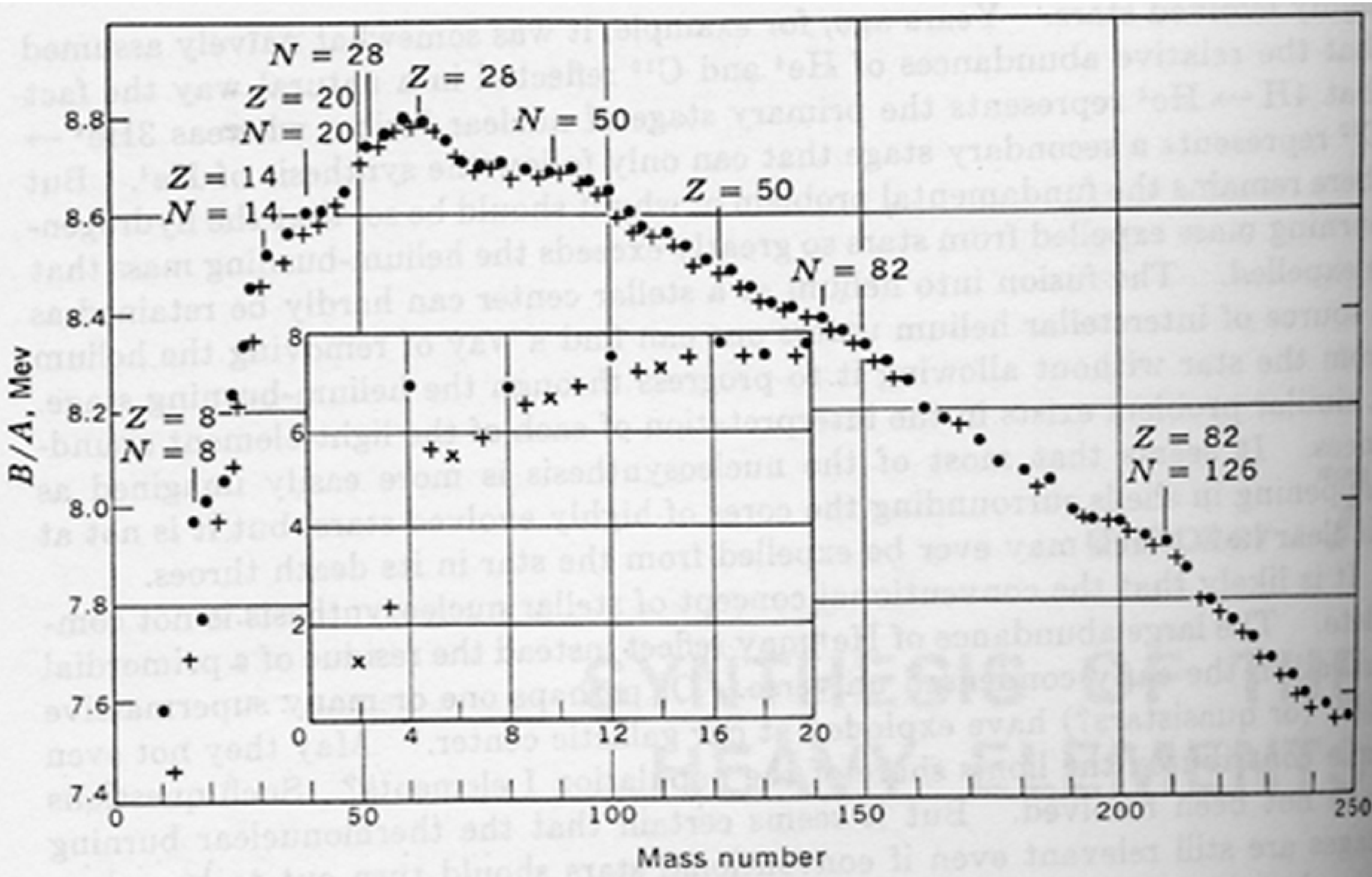
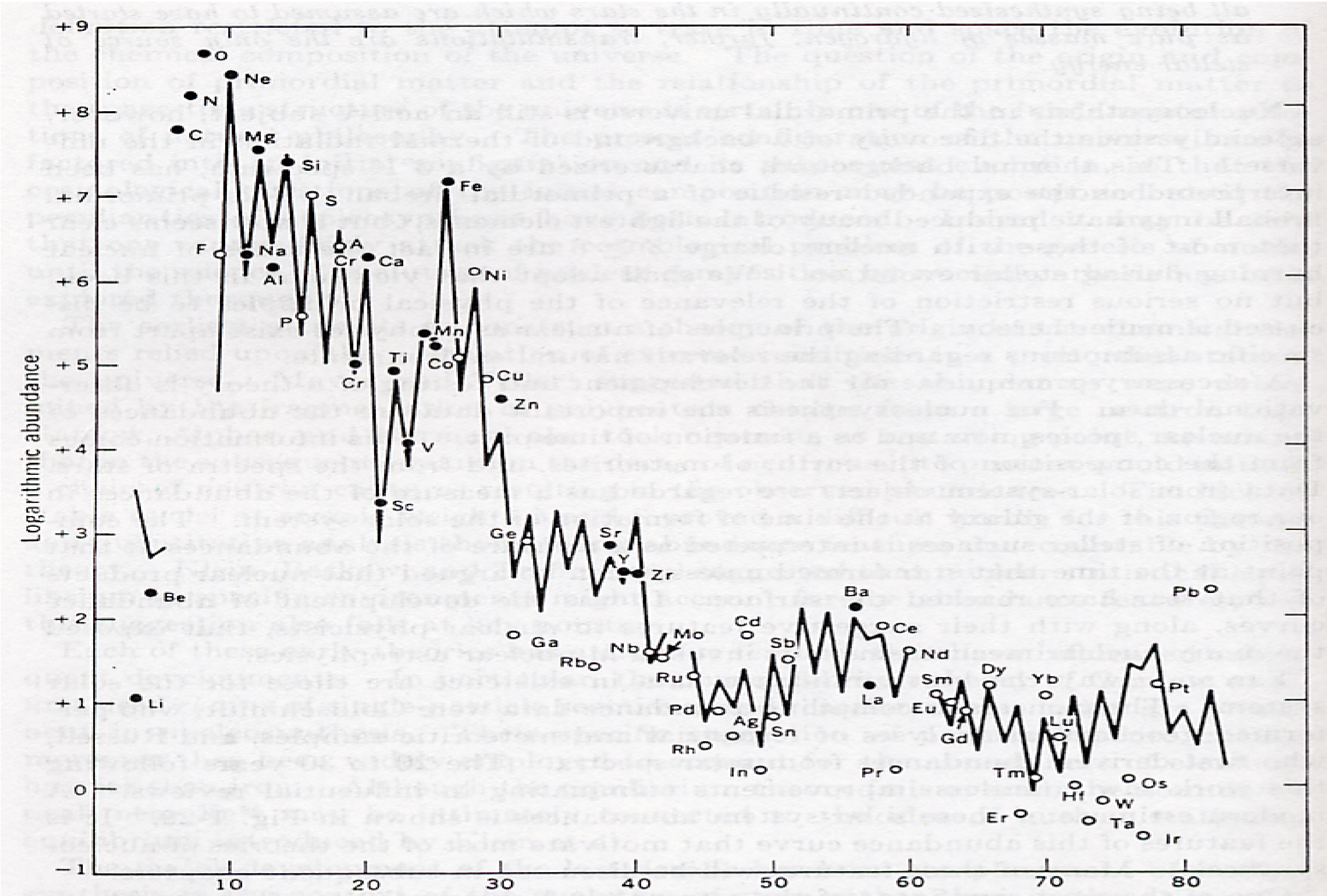


Fig. 7-1 The binding energy per nucleon of the most stable isobar of atomic weight *A*. The solid circles represent nuclei having an even number of protons and an even number of neutrons, whereas the crosses represent odd-*A* nuclei. (*M. A. Preston, "Physics of the Nucleus," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass.*, 1962.)

太阳系元素分布图



Logarithmic abundance
+9
+8
+7
+6
+5
+4
+3
+2
+1
0
−1
10
20
30
40
50
60
70
80
O
Ne
N
C
Mg
Si
Fe
S
F
A
Na
Cr
Ca
Al
Ni
P
Mn
Ti
Co
Cr
Cu
Zn
V
Sc
Ge
Sr
Y
Zr
Be
Ba
Pb
Cd
Ce
Mo
Sb
Nb
Nd
Ga
Rb
Ru
Dy
Sm
Yb
Pt
La
Eu
Pd
Lu
Gd
Ag
Sn
Rh
In
Pr
Tm
Os
Hf
W
Er
Ta
Ir
Li

重元素(A>70)核合成的慢中子俘获过程(s-过程)

- **1.**慢中子俘获过程基本图像
- **A >70** 直到 $_{82}Pb^{208}$ 的重元素，大约一半都是通过**s-**过程合成的。
- **s-**过程条件**:** 自由中子的浓度较低，原子核相继两次俘获中子的速率很慢，即相应的时标相当长，使得
- $\tau_n >> <\tau_\beta>$ **(A)**
- τ_n: (平均来说)接连两次俘获中子的时间间隔
- $<\tau_\beta>$: 在 "β稳定谷" 附近的不稳定核的平均寿命(大多在1^m - 1年之间, 典型平均值在**0.1**年左右)
- $\tau_n^{-1} = n_n <\sigma v>$,
- σ **:**靶核的中子吸收截面**; n_n:**自由中子数密度。
- **v:**中子相对于靶核的热运动速度**:**
- $v_T=(kT/m_n)^{1/2} \sim 3\times 10^8\ T_9^{1/2}$ **cm/sec**
- $<\sigma v>$: 对热中子的**Maxwell**平均值
- 轻核和中子幻数的核素， σ_n " 1mb ； $\sigma_n(^{16}O)$ " 10^{-4} **mb**
- 远离中子幻数的重核**:** σ_n " **1b = 1 × 10^{-24} cm^2**

s -过程

$\tau_n \sim 10^9/n_n$ 年

在红巨星核心或He燃烧壳层内 $n_n \sim (10^6 - 10^8)\ cm^{-3}$,

$\tau_n \sim (10 - 10^3)$年 $>> <\tau_\beta>$

在条件 (A)之下，经典的s-过程的基本假设是:假定所涉及的所有β-不稳定核，都有 $\tau_\beta << \tau_n$.

即:从种子核(一般取为^{56}Fe)开始，不断地俘获中子，一变为它的较重同位素:

$(Z, A) + n \rightarrow (Z, A+1) + \gamma$

(称为（n，γ)过程)

一旦某个原子核吸收中子太多而变为不稳定核时，它就很快地发生β-衰变，

$$(Z, A) \rightarrow (Z+1, A) + e^- + \bar{\nu}_e$$

s-过程(续)

通过这个过程，原子核的质子数目增长了，即沿着元素周期表的原子序数增大方向演变。新生的原子核再不断地吸收自由中子，不断地重复上述过程。这样，愈来愈重的元素便逐渐被合成了。这就是慢中子俘获过程(s-过程)。

由循环链: $_{82}Pb^{208}(n, \gamma)_{83}Bi^{209}(n\ \gamma)\ _{83}Bi^{210}$

$$_{83}Bi^{210}(\beta^-)_{84}Po^{210}(\alpha)_{82}Pb^{206}$$

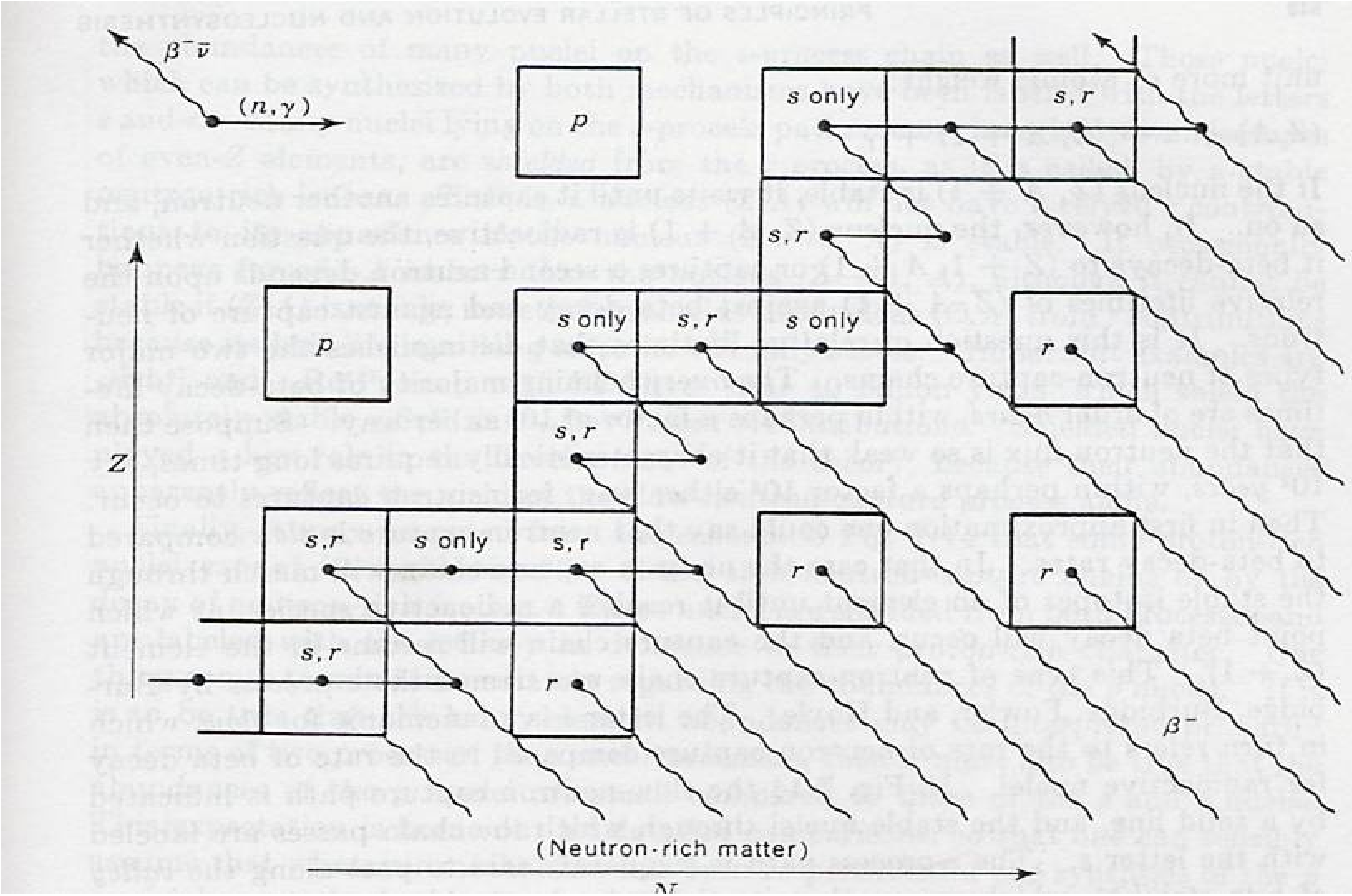
$\tau^{(\beta)}_{1/2}(Bi^{210}) = 5.01^d$;

$\tau^{(\alpha)}_{1/2}(Po^{210}) = 138.38^d$

s-过程最重只能合成到 $_{82}Pb^{208}$(Z=82, N=126, 双幻数)

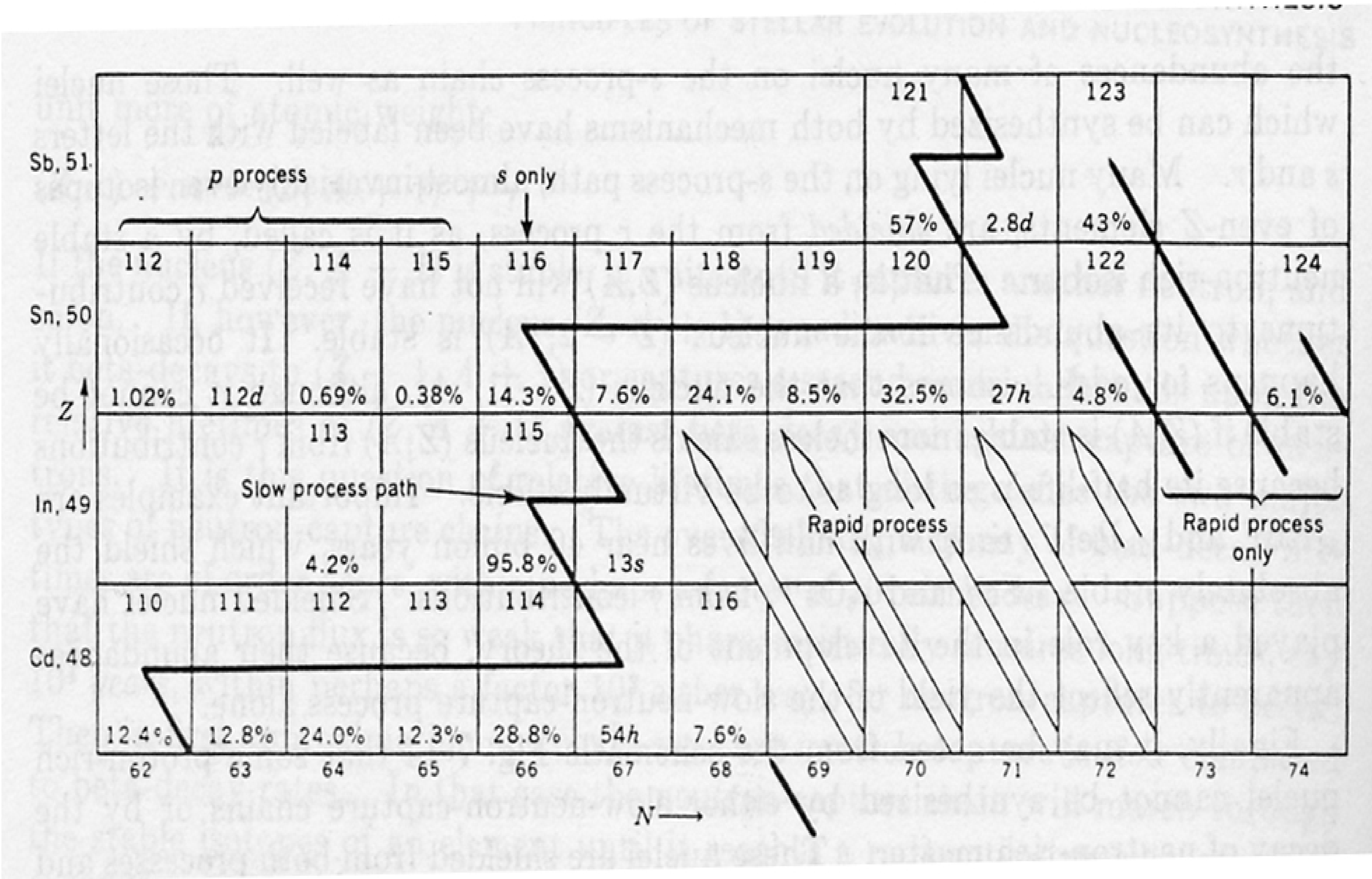
与 $^{209}Bi(\tau_{1/2} > 10^{16}$年)。

S-过程路径与r-过程

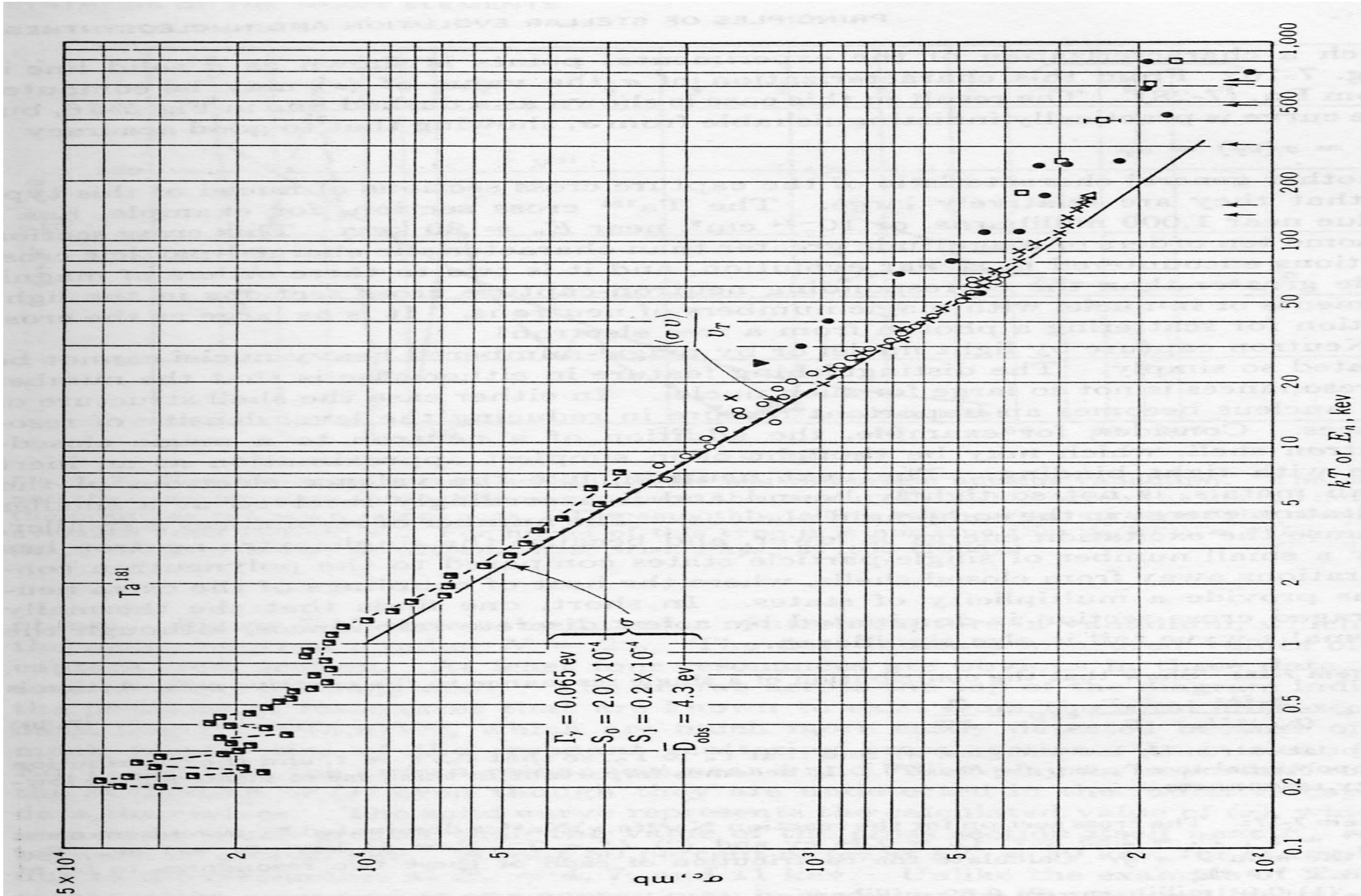


$\beta^-\bar{\nu}$
(n,γ)
p
s only
s, r
s, r
p
s only
s, r
s only
r
s, r
s, r
s only
s, r
r
r
s, r
r
Z
β^-
(Neutron-rich matter)
N

慢中子俘获过程(s-过程路径)



钽(Tantalum)的中子俘获截面



钒(Vanadium, V,中子幻数核)的中子俘获截面

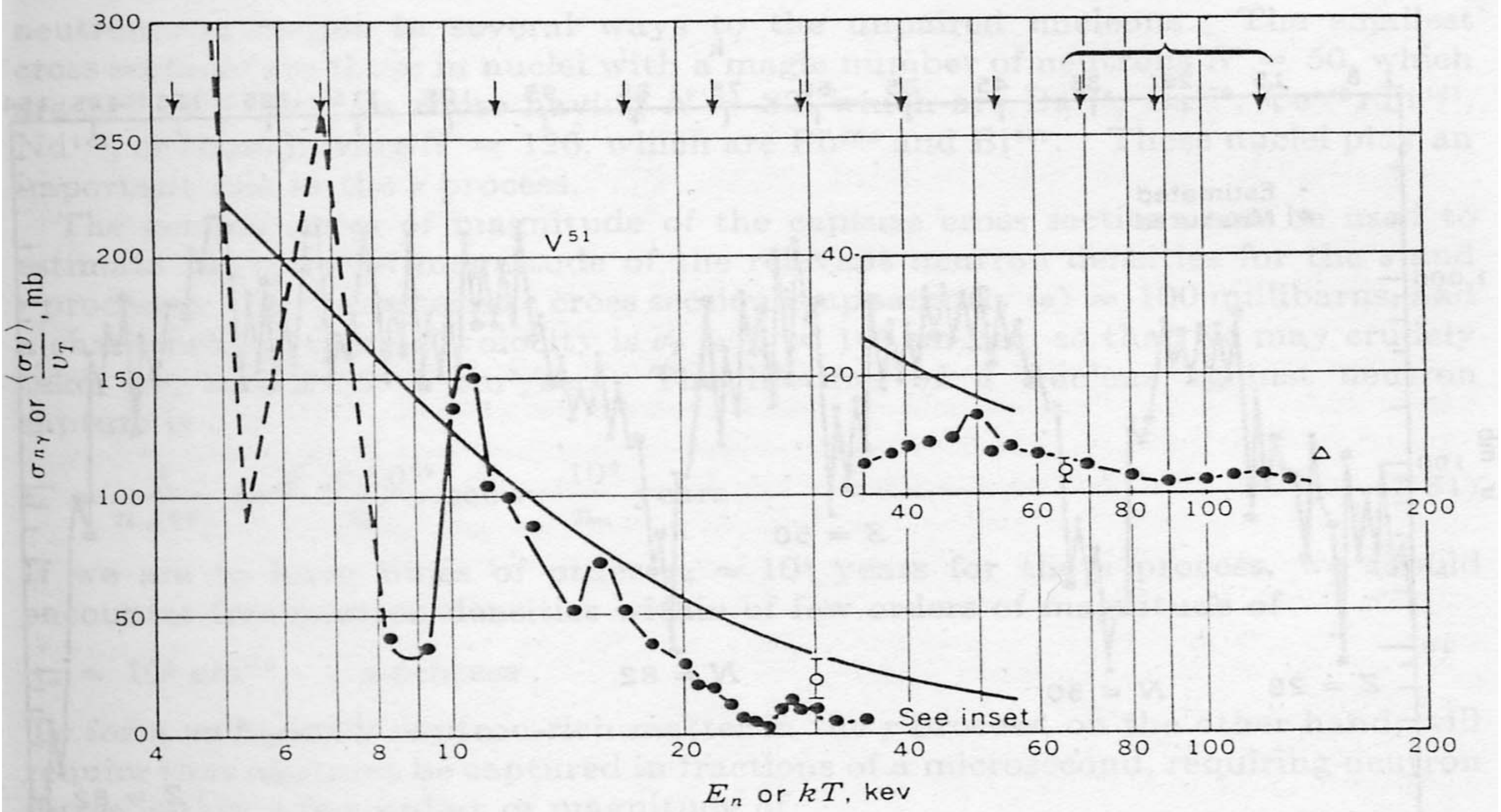
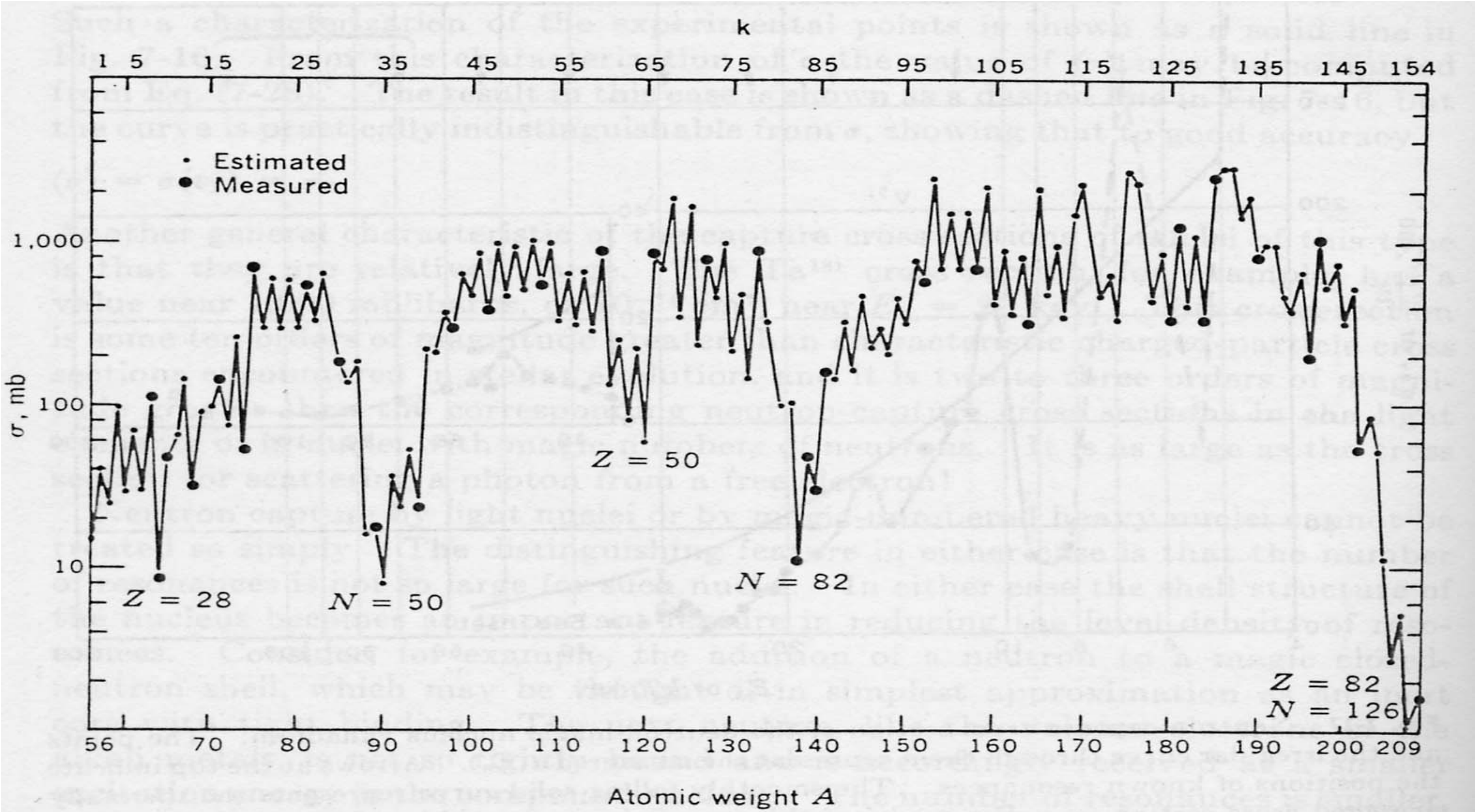


Fig. 7-17 Neutron-capture cross section of the neutron-magic nucleus vanadium. The points and the irregular curve through them represent the measured $\sigma(E_n)$. Arrows at the top indicate the positions of known resonances. The smoothly falling solid curve represents the thermally averaged cross section $\langle\sigma\rangle$. For nuclei of this type it is not true that $\langle\sigma(kT)\rangle \approx \sigma(E_n = kT)$. [*R. L. Macklin and J. H. Gibbons, Rev. Mod. Phys.*, **37**:166 (1965).]

中子俘获截面的奇偶性与中子幻数特征

沿s-路径测量的或估计的中子俘获截面(E_n=25keV),曲线显示了很强的中子奇偶性效应，它反映了复合核的平均能级密度。图中明显地显示了中子幻数(闭壳层)处中子俘获截面极小的特征。



太阳系元素丰度曲线中，s-过程的特征:

1) 太阳系物质重元素丰度曲线的特征:

a) 同 N=50,82,126的幻数(中子闭壳层位置)紧密相关。

b) 在A=(80-90),(130-140),(190-210)的三个质量范围内元素丰度曲线都分裂为双峰结构，呈现出两种不同中子流作用的结果，即它们分别在两种完全不同的天体物理环境下的两种核合成过程,即s-过程和r-过程。

2) s-核素丰度曲线特征

(1) s-核素丰度曲线明显地在中子幻数处出现峰值，而且峰值很锐。它们是

a) A=88 ($_{38}Sr^{88}$, N=50,)

b) A=138 ($_{56}Ba^{138}$, N=82)

c) A=208 ($_{82}Pb^{208}$, N=126, Z=82, 双幻数)

s-过程的中子源:

- AGB星: M < 2.2 $M_\odot$ $^{13}C(\alpha,n)^{16}O$
- M > 2.2 $M_\odot$ $^{22}Ne(\alpha,n)^{25}Mg$ 或双脉冲
- 大质量恒星(T >3×10^8 K): $^{22}Ne(\alpha,n)^{25}Mg$
- 有关反应$^{13}C(\alpha, n)^{16}O$的截面(S)因子实验得到的最新结果比目前在s-过程中子源研究中使用的要小得多。最近,吴开谡(2003,原子能研究院博士论文)利用这一最新实验结果计算了$^{13}C(\alpha, n)^{16}O$的天体核反应率，发现它比当前国际使用值要小2.37倍。
- 虽然^{12}C的中子俘获截面很小(~1mb),但在AGB星He燃烧壳层中
- 3α 反应的主要产物^{12}C仍然起着中子毒素的作用($^{12}C(n,\gamma)^{13}C$), 即它对中子源存在着明显的毒化和慢化作用。
- 上述两种因素相结合，必然对AGB星内s-过程中子源和s-过程核合成有相当大的影响 —— AGB星的模型必须要修改。

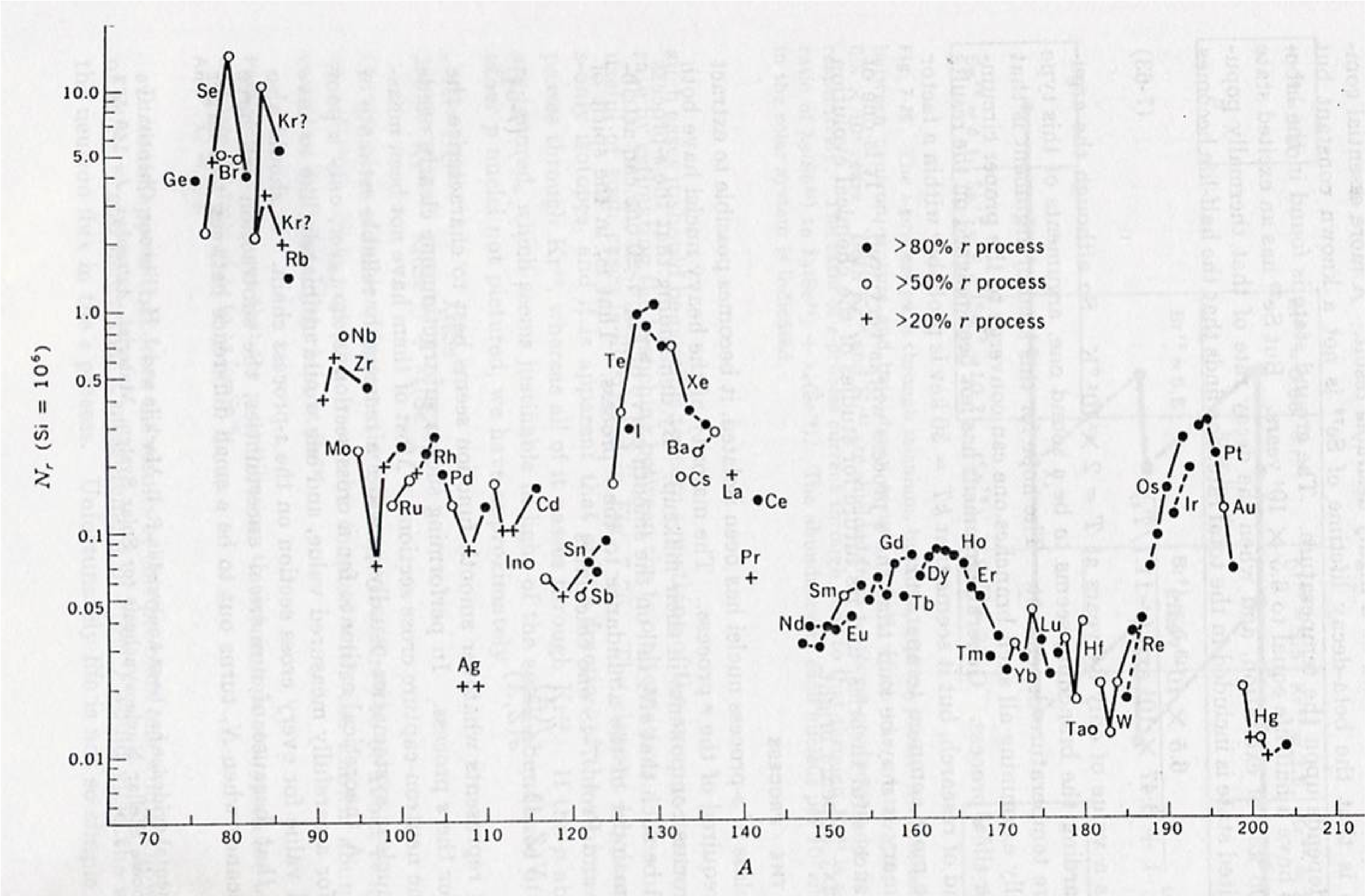
重元素(A>70)核合成的快中子俘获过程(r-过程)

一般，含有中子数量最多的稳定的丰中子核同位素(1种或两种)是不可能通过s-过程生成的。它们只能通过快中子俘获过程(r-过程)来合成。例如:
$^{122,124}Sn$, $^{128,130}Te$, $^{134,136}Xe$, $^{148,150}Nd$, ^{154}Sm……。

此外，比^{208}Pb还重的许多元素，特别是一些非常重的放射性核素，例如^{232}Th, ^{235}U, ^{238}U, ^{244}Pu 等等，都只能通过快中子俘获过程合来合成。A>70 的重元素约一半都是通过r-过程生成的。

主要由r-过程产生的元素有:
^{53}I, ^{63}Eu, ^{65}Tb, ^{67}Ho, ^{76}Os, ^{77}Ir, ^{78}Pt, ^{79}Au , ^{92}U, ^{90}Th

r – 核素丰度分布曲线



N_r (Si = 10^6)
10.0
5.0
1.0
0.5
0.1
0.05
0.01
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
210
A
>80% r process
>50% r process
>20% r process
Ge
Se
Br
Kr?
Kr?
Rb
Nb
Zr
Mo
Ru
Rh
Pd
Ag
Ino
Cd
Sn
Sb
Te
I
Xe
Ba
Cs
La
Ce
Pr
Nd
Sm
Eu
Gd
Tb
Dy
Ho
Er
Tm
Yb
Lu
Hf
Tao
W
Re
Os
Ir
Pt
Au
Hg

快中子俘获过程基本图像:

1. 恒星晚期或超新星核心，中子浓度可以超过 $10^{18-20}cm^{-3}$，以致于绝大多数重核素的中子俘获时标**n<<1 sec ,**远远快于大多数不稳定核素的β衰变的时标。

如此强的自由中子流环境下各种原子核都会相继接连地吸收中子。例如，从某一稳定的原子核**(Z,A)**出发，它一次又一次地不断吸收中子。即使由此刚生成的丰中子同位素是不稳定的，但由于β衰变的时标太长，它还来不及衰变时，强大的中子流再次轰击了它。这样，它继续不断地吸收中子，不断地转化为含有越来越多的中子同位素。经历了它所有稳定的同位素，当其核内所含中子数目超过最丰中子同位素之后，它逐渐远离β稳定谷。随着核内所含中子数目的增加，中子在原子核内的结合能在总体上有下降的趋势**(**呈现奇偶性起伏，即偶**N**核的中子结合能明显大於邻近的奇**N**核**)**。

在中子幻数**(N_c=20,28,50,82,126,184,** 中子组成满壳层**)**处，中子结合能达到极大**,** 在这些丰中子核之中，遇中子幻数后**(**满壳层外**)**的一个中子具有非常小的结合能。因此，上述这种快中子俘获反应链必定存在着一个极限。

由于下述两个因素使这种反应链暂时中断

a) 某一中子过丰的同位核，β^-衰变的时标变得相当短

$$\tau_\beta < \tau_n$$

b) 随着核内中子数目越来越多，原子核变得更加**(**β^-**)**不稳定， 中子结合**(Q_n)**几乎下降到零。在实际上，在中子俘获链尚未到达这种重**(**同位素之前，在**(**晚期恒星和超新星内 部**)**高温环境下，热光子引起**(Z,A+1)**光致发射中子的**(γ,n)**过程就使得上述中子俘获链自然地中止。

快中子俘获(r-)过程的滞留点(1)

其条件由(γ,n)和(n, γ)这一对互逆反应之间的细致平衡条件来寻求: (Z,A) + n $\Leftrightarrow$ (Z,A+1) + γ

具体条件为:在给定温度下，当某丰中子核的中子结合能低于下述临界值

$$Q_n(Z,A+1) < (T_9/5.040)\{\ 34.0749 + 1.5\log[(A/A+1)T9]$$

$$-\log n_n - \log \frac{g(Z,A+1)}{g(Z,A)}$$

$$\log \frac{G(Z,A+1)}{G(Z,A)} \quad \}$$

r-过程的滞留点(2)

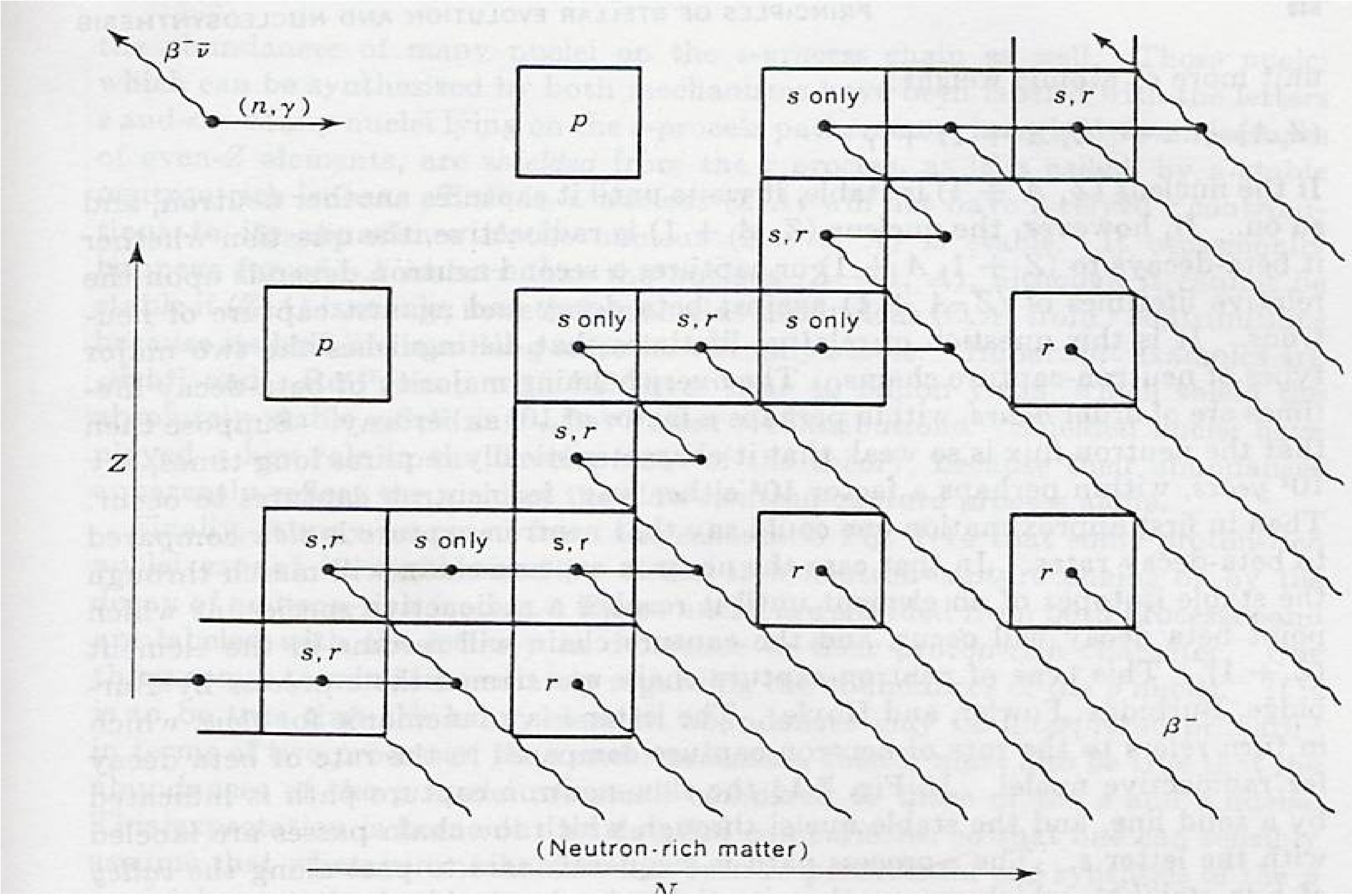
上述中子俘获反应链就暂时中断。其中，结合能**Q**以**MeV**为单位，**g(Z,A)**为原子核基态的简并度 **G(Z,A)**为原子核的配分函数。经过τ_β时间后，**(Z,A+1)**核通过β**-**衰变转变为**(Z+1,A+1)**核。在这种快中子俘获链暂时中断前的**(Z,A)**核称为快中子俘获过程的滞留点**(waiting point)**。

新形成的**(Z+1,A+1)**核或者是稳定的，或者仍是β不稳定核。若它的半衰期很短，有$\tau_\beta < \tau_n$,则它继续进行β**-**衰变而转化为**(Z+2,A+1)**核**;**若它的半衰期长於中子俘获时标$\tau_\beta > \tau_n$ (包括它是稳定核)，则它又重述前述的吸收中子过程，

r-过程

如此继续下去。直到星体爆发(超新星)，物质被抛向太空，失去了高密度自由中子(或强中子流)的环境，中子俘获过程立即结束，继之而来的是在上述过程中形成的极端超丰中子核去少(Z,A)通过一系列相继的β-衰变而衰变为稳定的同量异位素。(在这种β-衰变链中偶尔会伴随一些β延缓的中子发射甚至核分裂过程而降低原子核的原子量))这种稳定的原子核必定是含有中子数目最多的同量异位素。

S-过程路径与r-过程



$\beta^-\bar{\nu}$
(n,γ)
p
s only
s, r
s, r
p
s only
s, r
s only
r
s, r
s, r
s only
s, r
r
r
s, r
r
β^-
Z
(Neutron-rich matter)
N

由于奇A核只能有唯一的稳定的同量异位，而偶A核可以有1-3种稳定的同量异位素，因此当物质被抛向太空后，生成的超丰中子核经历一系列β⁻衰变后最后生成稳定的同量异位素必定位于β稳定谷之中，而中子超丰的偶A核在一系列衰变后形成的稳定同量异位素可能位于β稳定谷中，也可以处于β稳定谷的右下方((N,Z)核素图)或正下方((A,Z)核素图)，这种核素是在给定A下的最丰中子核，**s**-过程的路径**(**它沿着稳定谷**)**是不会经过这些核素。这些最丰中子的稳定同量异位素只能通过上述**r**过程而生成，称为纯**r**核。

r-元素丰度曲线和r过程的特性

a) 峰值出现在A=80,130和195附近(其峰值位置的质量数比s-元素曲线峰值位置的质量数分别低8,8和13)。

b) r-元素丰度曲线的峰值较宽。

c) r-元素丰度曲线的奇-偶起伏现象不明显(大部分几乎被抹平而变得光滑了)。

d) A > 209 的长寿命β不稳定核基本上都是由r-过程产生的。

原则上，从β稳定谷上(除被r核屏蔽的纯s核素外)的核素直到中子滴出线之间的所有核素都可能参与r过程，以此方式产生重核甚至超重核。

≈ e) r过程发生的环境必定是高温下爆炸性核燃烧过程(产生足够强≈大的中子流)或超新星内部。

f)计算表明，为了从理论上复制出太阳系物质r元素丰度曲线的主要特征，每次超新星爆发时，只需要$10^{-6}M_{\odot}$的物质经历了r过程。这限制了寻找r过程的天体物理场合。

g) 中子诱发和β延缓的裂变反应对于**Z>80**的核素形成过程特别重要。

h) 裂变反应在**r**过程中的重要作用**:**

(1) 裂变反应使**r**过程路径终止在 **Z ～ 94(A ～276),**它将分裂为

$Z_1 \sim 40$, $Z_2 \sim 50$ 的两个碎片。

(2) 当自由中子密度降低，**r**过程冻结后，β衰变使核素返回稳定线。而β延缓裂变使沿某一给定**A**值的同量异位素的核素流减少。

裂变产生的两个原子核，若是β稳定的，通常它将沿α衰变链衰变，最后可以确定寿命非常长的放射性核素

(例^{232}Th，^{235}U，^{238}U, ^{244}Pu)的相对丰度。

r−过程发生的天体物理场合

1) 超新星(SNII+SNI$_b$)核心区的“真空”高温辐射泡，自由中子大量存在：　$\rho=10^4$ g/cm^3，X(n) ≈ 10%，　n_n ~ 10^{26} cm^{-3}。

以 ^4He, ^{16}O 或 铁族元素为种子核。

超新星比较频繁(1/(20−30)年),但每次产生的r−元素不多。

2) 两个中子星相撞并合。

这种事件稀罕，但每次事件产生重元素较多(>1$M_\odot$)

谢谢大家